TUTORIUM LOGIK

KLAUSURVORBEREITUNG

AGENDA

- Wiederholen
  - Übersetzen: AL und PL
  - PL-Tableaux mit Identitätsrelation
  - Gültigkeit und Beweiskraft
  - Natürliches Schließen
- Fragen

ARBEITSKREIS FUNKTIONEN UND LAMBDA-KALKÜL

Nächstes Semester veranstalte ich einen Arbeitskreis über Funktionen und den Lambda-Kalkül.

Der Arbeitskreis wird mittwochs, von 18 bis 20 Uhr c.t., in Raum DPL23.206 stattfinden.

Falls ihr Interesse habt, meldet euch gerne unter vitus.schaefftlein@wwu.de

ÜBERSETZEN – AL

<u>Aufgabe</u>: Übersetzt so feinkörnig wie möglich in AL.

1) Egal, ob es regnet oder schneit – die Straße ist nass.
2) Wenn, falls Peter traurig ist, er nicht weint, ist er angespannt.
3) Wenn es genau dann regnet, wenn es nicht schneit, ist die Straße nass.
4) Weder regnet es, noch schneit es.
5) Wenn es regnet, ist die Straße nass, aber auch, wenn es schneit.

ÜBERSETZEN – AL

p: Es regnet.
q: Es schneit.
r: Die Straße ist nass.
s: Peter ist traurig.
t: Peter weint.
u: Peter ist angespannt.

Wobei gilt: „t“ kürzt „s*“ ab, „u“ kürzt „t*“ ab.

Deutsch	AL
Egal, ob es regnet oder schneit – die Straße ist nass.	$(p \lor q) \rightarrow r$
Wenn, falls Peter traurig ist, er nicht weint, ist er angespannt.	$(s \rightarrow \sim t) \rightarrow u$
Wenn es genau dann regnet, wenn es nicht schneit, ist die Straße nass.	$(p \equiv \sim q) \rightarrow r$
Weder regnet es, noch schneit es.	$\sim(p \lor q)$ ODER $\sim p \land \sim q$
Wenn es regnet, ist die Straße nass, aber auch, wenn es schneit.	$(p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r)$

ÜBERSETZEN – PL

Aufgabe: Übersetzt so feinkörnig wie möglich in PL.

1) Wenn Miezi eine Katze ist, gibt es Katzen.
2) Miezi ist eine Katze und niemand sonst.
3) Es gibt genau eine graue Katze.
4) Alle Katzen bis auf Miezi sind nicht grau.
5) Einige Katzen sind nicht Miezi.
6) Miezi ist die graue Katze.
7) Wenn alles, was grau ist, eine Katze ist, ist jede Katze grau.

ÜBERSETZEN – PL

Fx: x ist-eine-Katze   Gx: x ist-grau

v(x)=Miezi

Deutsch	PL
Wenn Miezi eine Katze ist, gibt es Katzen.	$Fx \rightarrow \exists x\, Fx$
Miezi ist eine Katze und niemand sonst.	$Fx \wedge {\sim}\exists y\, (Fy \wedge y{\neq}x)$
Es gibt genau eine graue Katze.	$\exists x\, (Fx \wedge Gx \wedge \forall y\, (Fy \wedge Gy \rightarrow y{=}x))$
Alle Katzen bis auf Miezi sind nicht grau.	$\forall y\, (Fy \wedge y{\neq}x \rightarrow {\sim}Gy) \wedge Gx$
Einige Katzen sind nicht Miezi.	$\exists y\, (Fy \wedge y{\neq}x)$
Miezi ist die graue Katze.	$\exists y\, (Fy \wedge Gy \wedge \forall z\, (Fz \wedge Gz \rightarrow z{=}y) \wedge y{=}x)$
Wenn alles, was grau ist, eine Katze ist, ist jede Katze grau.	$\forall x\, (Gx \rightarrow Kx) \rightarrow \forall x\, (Kx \rightarrow Gx)$

ÜBERSETZEN

Übersetzt – falls möglich – so feinkörnig wie möglich. Nutzt dafür die logische Sprache, die ausreicht, um das Maximum an Feinkörnigkeit zu erreichen.

Ursula trinkt gerne Bier.

Es schneit draußen.

Jeder von Peters Freund:innen hat einen Lieblingswitz.

Es ist unmöglich, dass es in Münster länger als drei Tage hintereinander schneit.

Alle Japaner:innen haben genau einen Nachnamen.

Vitus hofft, dass ihr die Klausur gut besteht.

ÜBERSETZEN - AL

Abkürzungsverzeichnis:

p: Es schneit draußen.

r: Vitus hofft, dass ihr die Klausur gut besteht.

q: Es ist möglich, dass es in Münster länger als drei Tage hintereinander schneit.

Deutsch	AL
Es schneit draußen.	p
Es ist unmöglich, dass es in Münster länger als drei Tage hintereinander schneit.	~q
Vitus hofft, dass ihr die Klausur gut besteht.	r

ÜBERSETZEN – PL

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x trinkt-gerne-Bier
Rxy: x ist-befreundet-mit y
Gx: x ist-ein-Lieblingswitz

R*xy: x hat y
Hx: x ist-ein-Japaner
Jx: x ist-ein-Nachname

v(x) = Ursula
v(y) = Peter

<u>Deutsch</u>	<u>PL</u>
Ursula trinkt gerne Bier.	Fx
Jeder von Peters Freunden hat einen Lieblingswitz.	$\forall x\ (Rxy \rightarrow \exists z\ (Gz \land R^*xz)$
Alle Japaner haben genau einen Nachnamen.	$\forall x\ (Hx \rightarrow \exists y\ (Jy \land R^*xy \land \forall z\ (Jz \land R^*xz \rightarrow y=z)))$

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT

Ein Schluss ist genau dann *gültig* (engl.: „valid“), wenn es keinen strukturgleichen Fall gibt, in dem die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

Ein Schluss ist genau dann *beweiskräftig (engl.: „sound“)*, wenn er gültig ist und alle seine Prämissen wahr sind.

→ Jeder beweiskräftige Schluss ist gültig, aber nicht jeder gültige Schluss beweiskräftig!

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

Aufgabe: Prüft mit dem Tafelschwammtest, ob es sich um einen gültigen Schluss handelt:

P1: Es schneit genau dann, wenn es regnet und es gefriert.

P2: Es schneit nicht.

K: Also gefriert es nicht.

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

P1: Es schneit genau dann, wenn es regnet und es gefriert.

P2: Es schneit nicht.

K: Also gefriert es nicht.

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

P1: A genau dann, wenn B und C.

P2: nicht A.

K: Nicht C.

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

P1: Eva ist Ursulas Tochter genau dann, wenn Ursula Eva geboren hat und Eva weiblich ist.

P2: Eva ist nicht Ursulas Tochter.

K: Also ist Eva nicht weiblich.

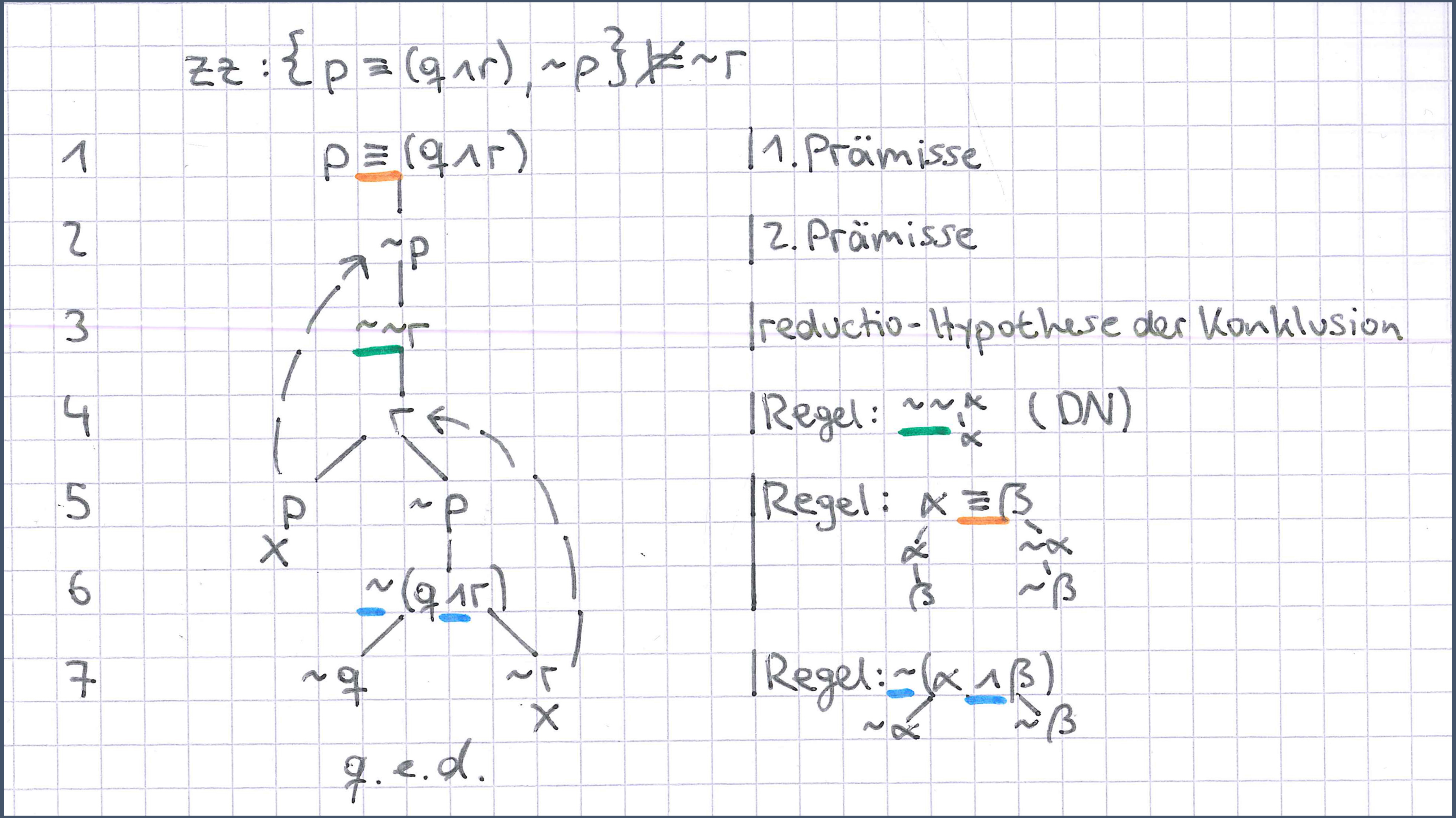
Prämissen können wahr sein, die Konklusion aber falsch – Eva kann weiblich sein, aber nicht Ursulas Tochter. Kein gültiger Schluss!

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

P1: $p \equiv (q \wedge r)$.

P2: $\sim p$.

K: $\sim r$.



GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

Aufgabe: Übersetzt den Schluss und prüft, ob er beweiskräftig ist.

P1: Es ist Obst im Haus.

P2: Es ist nicht der Fall, dass Obst im Haus ist.

K: Die Wohnung bleibt so, wie sie ist.

GÜLTIGKEIT UND BEWEISKRAFT – AUFGABE

p: Es ist Obst im Haus.
q: Die Wohnung bleibt so, wie sie ist.

P1: p

P2: ~p

K: q

Ex falso quodlibet: Gültig, aber nicht beweiskräftig, weil es nicht sein kann, dass die Prämissen zusammen wahr sind.

DIE IDENTITÄTSRELATION – TABLEAU-REGELN

ID: Reflexivität von Identischem

.

|

x=*x*

Man darf diese Regel voraussetzungslos anwenden!

UI: Ununterscheidbarkeit von Identischem

ɑ wff, in der *x* frei vorkommt

|

x=*y*

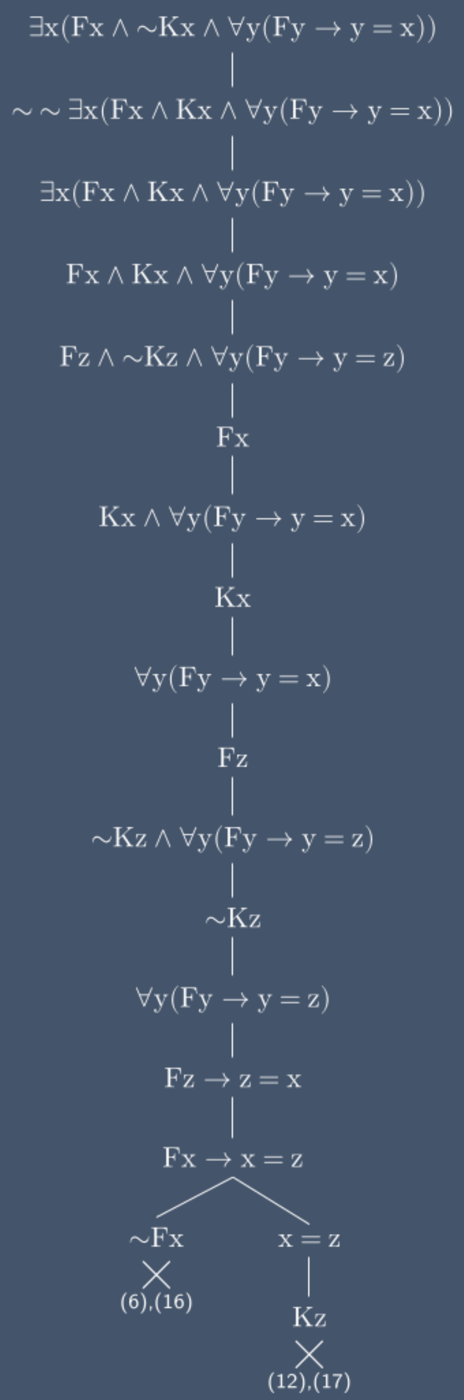
|

ɑ[*y*/*x*] *y* ersetzt jedes freie *x*

TABLEAUX - AUFGABE

Aufgabe:

Beweist mithilfe eines Schluss-Tableaus, dass die Formel
„$\exists x\ (Fx \land {\sim}Kx \land \forall y\ (Fy \rightarrow y=x))$“ die Formel
„${\sim}\exists x\ (Fx \land Kx \land \forall y\ (Fy \rightarrow y=x))$“ impliziert.



(1)	$\exists x(Fx \land \sim Kx \land \forall y(Fy \to y = x))$	Erste Prämisse
(2)	$\sim\sim\exists x(Fx \land Kx \land \forall y(Fy \to y = x))$	reductio-Hypothese
(3)	$\exists x(Fx \land Kx \land \forall y(Fy \to y = x))$	(2) DN
(4)	$Fx \land Kx \land \forall y(Fy \to y = x)$	(3) ES: x/x
(5)	$Fz \land \sim Kz \land \forall y(Fy \to y = z)$	(1) ES: z/x
(6)	Fx	(4) $(\land)$
(7)	$Kx \land \forall y(Fy \to y = x)$	(4) $(\land)$
(8)	Kx	(7) $(\land)$
(9)	$\forall y(Fy \to y = x)$	(7) $(\land)$
(10)	Fz	(5) $(\land)$
(11)	$\sim Kz \land \forall y(Fy \to y = z)$	(5) $(\land)$
(12)	$\sim Kz$	(11) $(\land)$
(13)	$\forall y(Fy \to y = z)$	(11) $(\land)$
(14)	$Fz \to z = x$	(9) US: z/y
(15)	$Fx \to x = z$	(13) US: x/y
(16)	$\sim Fx$ ✕ (6),(16) $x = z$	(15) $(\to)$
(17)	Kz ✕ (12),(17)	(8,16) UI: z/x in Kx

K-AL – AUFGABE

Aufgabe: Zeigt mit K-AL, dass die wff zum Kontrapositionsgesetz (hier als Konditional – nicht als Bikonditional) allgemeingültig ist. Stützt euch dabei auf den folgenden Gedankengang:

Nehmen wir an, wenn p, dann q. Nehmen wir nun an, dass non-q. Außerdem lasst uns annehmen, dass p. Dann folgt q. Das ist ein Widerspruch! Folglich können wir unsere dritte Hypothese negieren. Jetzt brauchen wir nur noch zweimal zu konditionalisieren. Erstens gilt, wenn non-q, dann non-p. Zweitens, schließlich, folgt also: Falls es so ist, dass wenn p, dann q, so gilt: wenn non-q, dann non-p.

K-AL – LÖSUNG

zz: $\vdash (p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \to q$	-	Hyp
*	2	$\sim q$	-	Hyp
*	3	p	-	Hyp
* *	4	q	1, 3	E→
* * *	5	$\bot$	2, 4	E~
* *	6	$\sim p$	3, 5	I~
*	7	$\sim q \to \sim p$	2, 6	I→
	8	$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$	1, 7	I→

VIEL ERFOLG BEI DER KLAUSUR UND IN EUREM WEITEREN STUDIUM!