Tutorium Logik

Prädikatenlogik: Identität

Agenda

- Organisatorisches
- Tableaux: Quantorendreher, Barbari
- Identitätsrelation
- Relationseigenschaften in PL
- Die Frege-Trichotomie in PL
- Ausnahmen machen mit der Identitätsrelation
- Kennzeichnungen

Organisatorisches - Altklausurentag

Der Altklausurentag findet am Freitag, dem 27.01.2023 im S2 statt.

Vorläufiger Fahrplan:

Uhrzeit	Klausur	Tutor:innen
10:00 Uhr	2016/17	Marvin, Luca
12:00 Uhr	2017/18	Finn
14:00 Uhr	2018/19	Leonie
16:00 Uhr	2019/20	Vitus

Tableaux – Aufgabe

Aufgabe: Beweist bis zur nächsten Sitzung mithilfe eines PL-Tableaus die Problematik des Quantorendrehers, indem ihr zeigt, dass die in Frage stehenden Formeln nicht äquivalent sind. Erklärt außerdem, wie man am Tableau erkennen kann, dass „Jemand wird von allen gemocht“ „Alle mögen jemanden“ impliziert.

zz: $\not\models \forall x \exists y\, Rxy \equiv \exists y \forall x\, Rxy$

(1)	$\sim(\forall x \exists y\, Rxy \equiv \exists y \forall x\, Rxy)$		reductio-Hypothese
(2)	$\forall x \exists y\, Rxy$	$\sim\forall x \exists y\, Rxy$	(1) $(\sim \equiv)$
(3)	$\sim\exists y \forall x\, Rxy$	$\exists y \forall x\, Rxy$	(1) $(\sim \equiv)$
(4)	$\forall y \sim \forall x\, Rxy$	$\exists x \sim \exists y\, Rxy$	(3) DT; (2) DT
(5)	$\exists y\, Rxy$	$\forall x\, Rxy$	(2) US: x/x; (3) ES: y/y
(6)	Rxy	$\sim\exists y\, Rxy$	(5) ES: y/y; (4) ES: x/x
(7)	$\sim\forall x\, Rxy$	$\forall y \sim Rxy$	(4) US: y/x; (6) DT
(8)	$\exists x \sim Rxy$	Rxy	(7) DT; (5) US: y/x
(9)	Rzy	$\sim Rxy$	(8) ES: z/x; (7) US: y/x
(10)	$\ldots$	$\times$ (8), (9)	kein Widerspruch; Allquantor dreht durch

q. e. d.

Tableaux – Aufgabe II

<u>Aufgabe</u>: Zeigt mithilfe eines Tableaus, dass der Barbari-Schluss nicht PL-gültig ist. Erklärt mithilfe des logischen Quadrats, wieso dieser Schluss zwar in der Aristotelischen Syllogistik gültig ist, in PL aber nicht.

Die Tableau-Methode: modus Barbari - Beispiel

<u>Abkürzungsverzeichnis:</u>

Fx: x ist ein Lebewesen Hx: x ist ein Mensch

Gx: x ist sterblich

Bar-	P1	Alle Lebewesen sind sterblich.	$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
bar-	P2	Alle Menschen sind Lebewesen.	$\forall x\ (Hx \rightarrow Fx)$
i	K	Einige Menschen sind sterblich.	$\exists x\ (Hx \land Gx)$

zz: $\{\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to Fx)\} \not\models \exists x(Hx \wedge Gx)$

Fx: x ist ein Lebewesen
Gx: x ist sterblich
Hx: x ist ein Mensch

(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	1. Prämisse
(2)	$\forall x(Hx \to Fx)$	2. Prämisse
(3)	$\sim\exists x(Hx \wedge Gx)$	reductio-Hypothese
(4)	$\forall x \sim (Hx \wedge Gx)$	(3) DT
(5)	$Fx \to Gx$	(1) US: x/x
(6)	$Hx \to Fx$	(2) US: x/x
(7)	$\sim(Hx \wedge Gx)$	(4) US: x/x
(8)	$\sim Fx$; Gx	(5) $(\to)$
(9)	$\sim Hx$; Fx ; $\sim Hx$; Fx	(6) $(\to)$
(10)	$\sim Hx$; $\sim Gx$; $\times$ (8), (9) ; $\sim Hx$; $\sim Gx$ $\times$ (8), (10) ; $\sim Hx$; $\sim Gx$ $\times$ (8), (10)	(7) $(\sim\wedge)$

q. e. d.

Das logische Quadrat in der Prädikatenlogik?

Alle S sind P. $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

$\sim\exists x\,(Fx \wedge Gx)$ Kein S ist P.

Hier fehlt die Implikation vom a-Urteil zum i-Urteil, weil wir leere Extensionen von Prädikaten zulassen. Deshalb ist modus Barbari nicht PL-gültig!

Einige S sind P. $\exists x\,(Fx \wedge Gx)$

$\sim\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$ Einige S sind nicht P.

Die Identitätsrelation

<u>Die Identitätsrelation</u>

– Ist die Menge aller Zweiertupel, für die gilt:
  - Beide Komponenten der Tupel sind Elemente des Redebereichs
  - die erste Komponente ist gleichzeitig auch die zweite
– Beispiel:
  - D = {Peter, Jochen, Klaus}
  - I(=) = {⟨Peter, Peter⟩, ⟨Jochen, Jochen⟩, ⟨Klaus, Klaus⟩}
– wird mit dem Identitätszeichen „=“ ausgedrückt, das – im Gegensatz zu anderen Prädikatsymbolen – *zwischen* den Individuenkonstanten steht: „x=y“ (statt „=xy“)

Die Identitätsrelation – Syntax und Semantik

Die Identitätsrelation benötigt eine Erweiterung der Syntax und Semantik von PL zu $PL_{+=}$:

<u>Syntax</u>: Wenn *x* und *y* beliebige Individuenkonstanten sind, ist „$x=y$" eine atomare Formel.

<u>Semantik</u>: $M \Vdash_{v} x=y$ gdw v(*x*) identisch ist mit v(*y*)

<u>Zusatzdefinition</u>: $x \neq y =_{def} {\sim}x=y$ → „~(x=y)" ist keine wff!

Die Identitätsrelation – Tableau-Regeln

ID: Reflexivität von Identischem

.
|
$x=x$

Man darf diese Regel voraussetzungslos anwenden!

UI: Ununterscheidbarkeit von Identischem

α beliebige wff
|
$x=y$
|
$\alpha[y/x]$ y ersetzt jedes freie x in α

RELATIONSEIGENSCHAFTEN IN PL

Seien d, d‘ und d‘‘ beliebige Objekte aus dem Redebereich. Dann gilt:

Eigenschaft	Bedingung	Formel	Beispiel
Reflexivität	$\langle d, d\rangle \in [\![R]\!]$	$\forall x\, Rxx$	Rxy: x ähnelt y
Symmetrie	Wenn $\langle d, d'\rangle \in [\![R]\!]$, dann $\langle d', d\rangle \in [\![R]\!]$	$\forall xy\, (Rxy \rightarrow Ryx)$	Rxy: x diskutiert-mit y
Transitivität	Wenn $\langle d, d'\rangle \in [\![R]\!]$ und $\langle d', d''\rangle \in [\![R]\!]$, dann $\langle d, d''\rangle \in [\![R]\!]$	$\forall xyz\, (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$	Rxy: x ist-kleiner-als y

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation nennen wir „Äquivalenzrelation“.

→ Die Identitätsrelation ist eine Äquivalenzrelation!

Identitätsrelation: Reflexivität

zz: $\vDash \forall x\ x=x$

(1)	$\sim\forall x\, x = x$	reductio-Hypothese
(2)	$\exists x\, x \neq x$	(1) DT
(3)	$x \neq x$	(2) ES: x/x
(4)	$x = x$	ID

$\times$

$(3), (4)$

q. e. d.

Identitätsrelation: Symmetrie

zz: $\models \forall x \forall y\ (x=y \rightarrow y=x)$

(1)	$\sim\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	reductio-Hypothese
(2)	$\exists x \sim \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	(1) DT
(3)	$\sim\forall y(x = y \rightarrow y = x)$	(2) ES: x/x
(4)	$\exists y \sim (x = y \rightarrow y = x)$	(3) DT
(5)	$\sim(x = y \rightarrow y = x)$	(4) ES: y/y
(6)	$x = y$	(5) $(\sim \rightarrow)$
(7)	$y \neq x$	(5) $(\sim \rightarrow)$
(8)	$x \neq x$	(6,7) UI: x/y in $y \neq x$
(9)	$x = x$	ID

$\times$ (8), (9)

q. e. d.

IDENTITÄTSRELATION: TRANSITIVITÄT

zz: $\models \forall x \forall y \forall z\ (x{=}y \wedge y{=}z \rightarrow x{=}z)$

(1)	$\sim\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	reductio-Hypothese
(2)	$\exists x\exists y\exists z \sim (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	(1) DT (mehrfach)
(3)	$\exists y\exists z \sim (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	(2) ES: x/x
(4)	$\exists z \sim (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	(3) ES: y/y
(5)	$\sim(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	(4) ES: z/z
(6)	$x = y \wedge y = z$	(5) $(\sim \rightarrow)$
(7)	$x \neq z$	(5) $(\sim \rightarrow)$
(8)	$x = y$	(6) $(\wedge)$
(9)	$y = z$	(6) $(\wedge)$
(10)	$x = z$	UI: y/z in $x = y$
	$\times$ (7), (10)	

q. e. d.

Die Frege-Trichotomie

Die Frege-Trichotomie

– Erklärt, wie man das Wort „ist“ im Deutschen benutzt
– Unterscheidet zwischen drei Arten:

Ist der…	Funktion
Prädikation	man weist etwas eine Eigenschaft zu oder setzt es in Relation zu etwas anderem
Identität	man behauptet, dass zwei Namen dasselbe bezeichnen
Existenz	man behauptet, dass es etwas (nicht) gibt

DIE FREGE-TRICHOTOMIE IN PL

Abkürzungsverzeichnis:
Fx: x ist-Logiktutor v(x) = Vitus
Gx: x ist-Gott

„ist" der…	Beispiel (deutsch)	Übersetzung (PL)
Prädikation	Vitus ist Logiktutor.	Fx
Identität	Vitus ist Vitus.	$x=x$
Existenz	Es ist ein Gott.	$\exists x\, Gx$

Ausnahmen machen in $PL_{+=}$

Abkürzungsverzeichnis:
Kxy: x kocht-für y
v(x) = Vitus

Beispiel (deutsch)	Übersetzung (PL)
Alle kochen für Vitus (auch Vitus für sich selbst).	$\forall y\ Kyx$
Alle kochen für Vitus, nur Vitus eventuell nicht für sich selbst.	$\forall y\ (y \neq x \rightarrow Kyx)$
Alle – außer Vitus selbst – kochen für Vitus.	$\forall y\ (y \neq x \rightarrow Kyx) \wedge \sim Kxx$, $\forall y\ (y \neq x \equiv Kyx)$

S. 112, Nr. 1

<u>Abkürzungsverzeichnis</u>:

Fx:	x geht-es-gut	v(x) = Uwe
Rxy:	x ist-eifersüchtig-auf y	v(y) = Gabi
R*xy:	x liebt y	v(z) = Jens

	Normalsprachlich (Deutsch)	Formal (PL)
[1]	Allen außer Jens geht es gut.	$\forall x\ (x \neq z \rightarrow Fx) \wedge \sim Fz$
[2]	Alle lieben Gabi, nur sie sich selbst nicht.	$\forall x\ (x \neq y \rightarrow Rxy) \wedge \sim Ryy$
[3]	Jeder ist eifersüchtig auf alle außer auf sich selbst.	$\forall x \forall y\ (x \neq y \equiv Rxy)$

Kennzeichnungen

Kennzeichnungen

– Sind – wie Eigennamen – singuläre Terme
– Referieren auf genau ein Objekt, indem sie es (innerhalb eines Kontextes) eindeutig beschreiben
– Werden meist mit dem bestimmten Artikel ausgedrückt
– Beispiele:
  - „derjenige, der gerade steht“
  - „die, die sich als letztes gemeldet hat“
  - „der größte Berg der Welt“

→ Wie formalisieren wir Kennzeichnungen?

Die Russell-Formel – informal

Die Russell-Formel

- Formalisiert Sätze, die Kennzeichnungen enthalten
- Wurde in „On Denoting“ (1905) von Russell eingeführt
- Folgt folgender Idee: „Dasjenige, das F ist, ist G“ bedeutet das gleiche wie „Es gibt genau ein F, und das ist G“

Russell-Formel – formal

<u>Abkürzungsverzeichnis</u>

Fx: x ist-König-von-Frankreich   Gx: x ist-kahl

	<u>Normalsprachlich</u>	<u>Prädikatenlogisch</u>
1. Schritt: Existenz	Wir behaupten, dass *mindestens ein* Gegenstand im Redebereich König von Frankreich ist	$\exists x\ Fx$
2. Schritt: Einzigartigkeit	Wir fügen hinzu ($\wedge$), dass es höchstens einen Gegenstand im Redebereich gibt, der König von Frankreich ist.	$\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow x=y))$
3. Schritt: Prädikation	Wir fügen hinzu ($\wedge$), dass dieser Gegenstand kahl ist.	$\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow x=y) \wedge Gx)$

Alternative (und äquivalente) Formulierung der Russell-Formel:

„$\exists x\ (\forall y\ (Fy \equiv x=y) \wedge Gx)$“

Russell-Formel: Zählen (bestimmt)

$\exists x\ (Fx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow x{=}y))$ oder $\exists x \forall y\ (Fy \equiv x{=}y)$	Es gibt genau einen König von Frankreich.
$\exists x\ (Fx \wedge \sim\forall y\ (Fy \rightarrow x{=}y))$ oder $\exists xy\ (Fx \wedge Fy \wedge x{\neq}y)$	Es gibt mindestens zwei Könige von Frankreich.
$\exists xy\ (Fx \wedge Fy \wedge x{\neq}y \wedge \forall z\ (Fz \rightarrow z{=}x \vee z{=}y))$	Es gibt genau zwei Könige von Frankreich.

Russell-Formel: Zählen (unbestimmt)

$\exists x\ x=x$	Es gibt mindestens ein Ding.
$\exists x\ (x=x \wedge \forall y\ y=x)$	Es gibt genau ein Ding.
$\exists xy\ (x=x \wedge y=y \wedge x\neq y \wedge \forall z\ (z=x \vee z=y))$	Es gibt genau zwei Dinge.
$\exists xy\ (x=x \wedge y=y \wedge x\neq y \wedge \sim\forall z\ (z=x \vee z=y))$	Es gibt mindestens drei Dinge.

Vokabeln

- Identitätsrelation
- Relationseigenschaften in PL
- Tableau-Regeln für die Identitätsrelation
- Übersetzen von Ausnahmen
- Frege-Trichotomie in PL
- Kennzeichnungen
- Zählen

Aufgaben

- Lesen (und verstehen!):
  - 4. Auflage: S. 104-107
  - 5. Auflage: S. 113-116
- „Vokabelliste Logik: Deutsch – Englisch (Vitus)“ aus dem Learnweb herunterladen und jede Vokabel erklären

Bis nächste Woche!