Tutorium Logik

Prädikatenlogik: Assertorische Syllogistik & PL-Tableaux

Agenda

- Das logische Quadrat
- Der Quantorendreher
- PL-Tableaux
  - Universelle Spezialisierung
  - Existentielle Spezialisierung
  - Durchtauschen
  - Beispiele

Die kategorischen Urteile in PL

Abkürzungsverzeichnis:

Kx: x ist-eine-Katze
Sx: x ist-süß

bejahend → affirmo.
verneinend → nego.

Name	Funktion	Normalsprachlich	Prädikatenlogisch
a-Urteil	Universell bejahendes Urteil	Alle Katzen sind süß.	$\forall x\ (Kx \rightarrow Sx)$
e-Urteil	Universell verneinendes Urteil	Keine Katze ist süß.	$\sim\exists x\ (Kx \wedge Sx)$
i-Urteil	Partikulär bejahendes Urteil	Einige Katzen sind süß.	$\exists x\ (Kx \wedge Sx)$
o-Urteil	Partikulär verneinendes Urteil	Nicht alle Katzen sind süß.	$\sim\forall x\ (Kx \rightarrow Sx)$

S. 103, Nr. 1

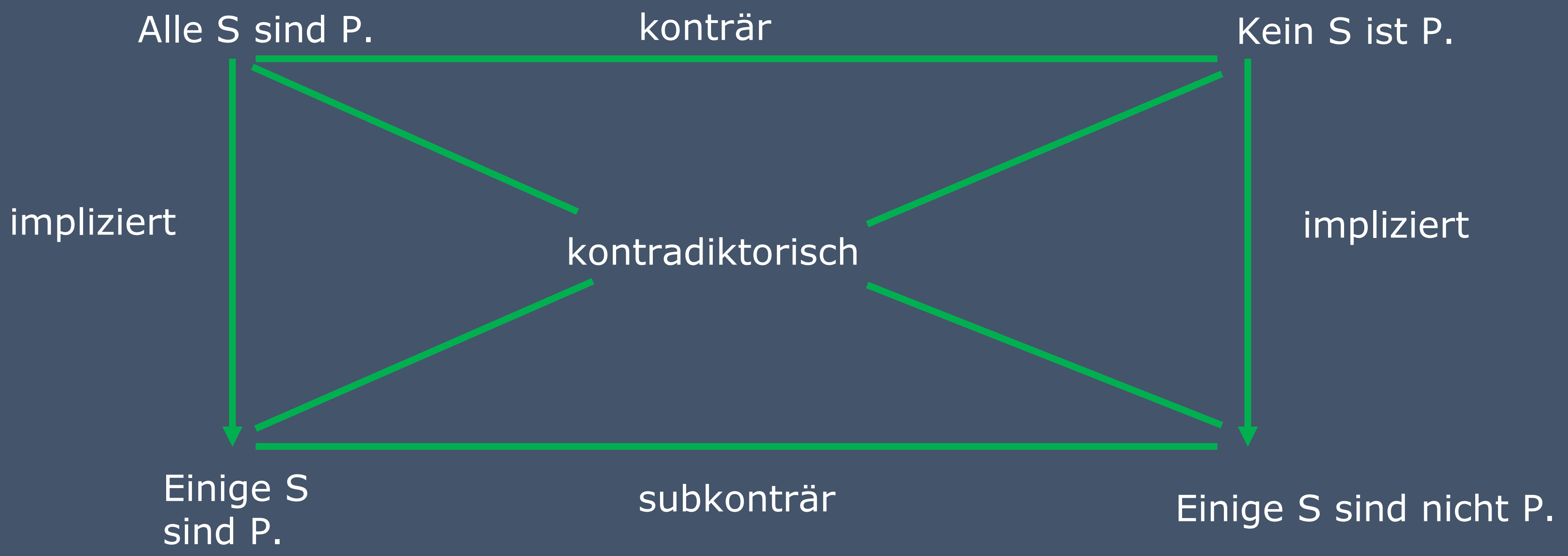
Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x ist-ein-Schwan

Gx: x ist-weiß

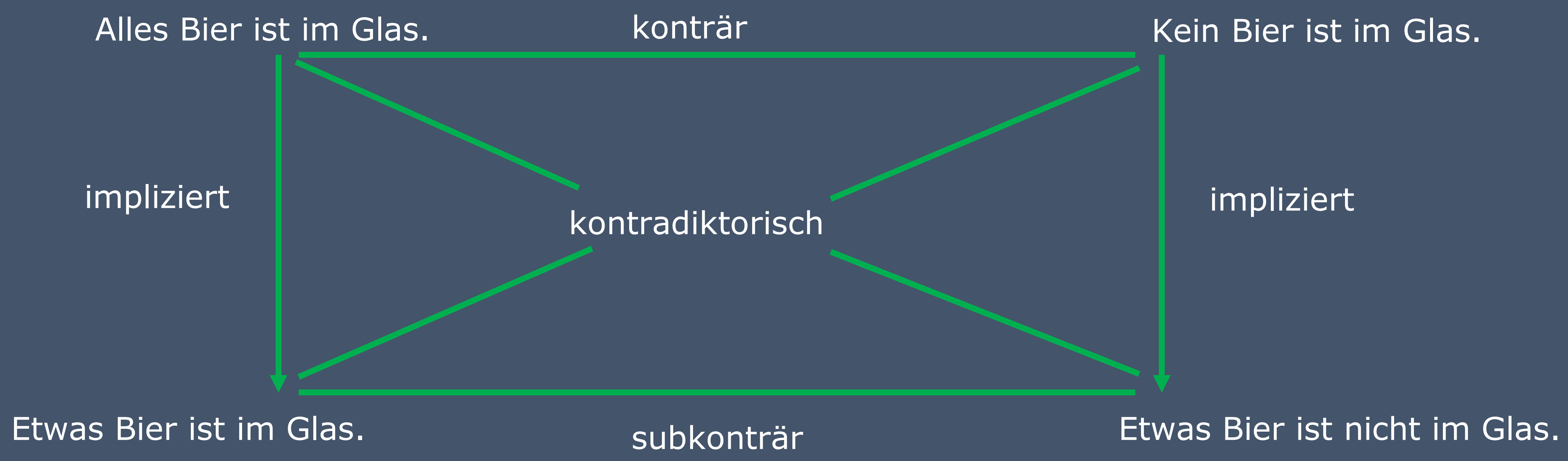
	Normalsprachlich	Prädikatenlogisch
[1]	Alle Schwäne sind weiß.	$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
[2]	Einige Schwäne sind nicht weiß.	$\exists x\ (Fx \wedge \sim Gx)$
[3]	Einige Schwäne sind weiß.	$\exists x\ (Fx \wedge Gx)$
[4]	Kein Schwan ist weiß.	$\sim \exists x\ (Fx \wedge Gx)$

Das logische Quadrat nach Aristoteles



Kontradiktorisch	Zwei Behauptungen können weder zusammen wahr noch falsch sein.
Konträr	Zwei Behauptungen können nicht zusammen wahr sein (aber zusammen falsch).
Subkontär	Zwei Behauptungen können nicht zusammen falsch sein (aber zusammen wahr).
Implikation	Wenn eine Behauptung wahr ist, dann muss die andere Behauptung auch wahr sein.

Zu tief ins Glas geschaut? Das logische Quadrat in der Kneipe



Kontradiktorisch	Zwei Behauptungen können weder zusammen wahr noch falsch sein.
Konträr	Zwei Behauptungen können nicht zusammen wahr sein (aber zusammen falsch).
Subkontär	Zwei Behauptungen können nicht zusammen falsch sein (aber zusammen wahr).
Implikation	Wenn eine Behauptung wahr ist, dann muss die andere Behauptung auch wahr sein.

S. 84, Nr. 5

Bringen Sie die folgenden Sätze in einem logischen Quadrat unter und erklären Sie die logischen Beziehungen zwischen den Sätzen im Einzelnen.

[1] „Mein Bierglas ist voll.“

[2] „In meinem Bierglas ist noch etwas drin.“

[3] „Mein Bierglas ist nicht mehr voll.“

[4] „Mein Bierglas ist leer.“

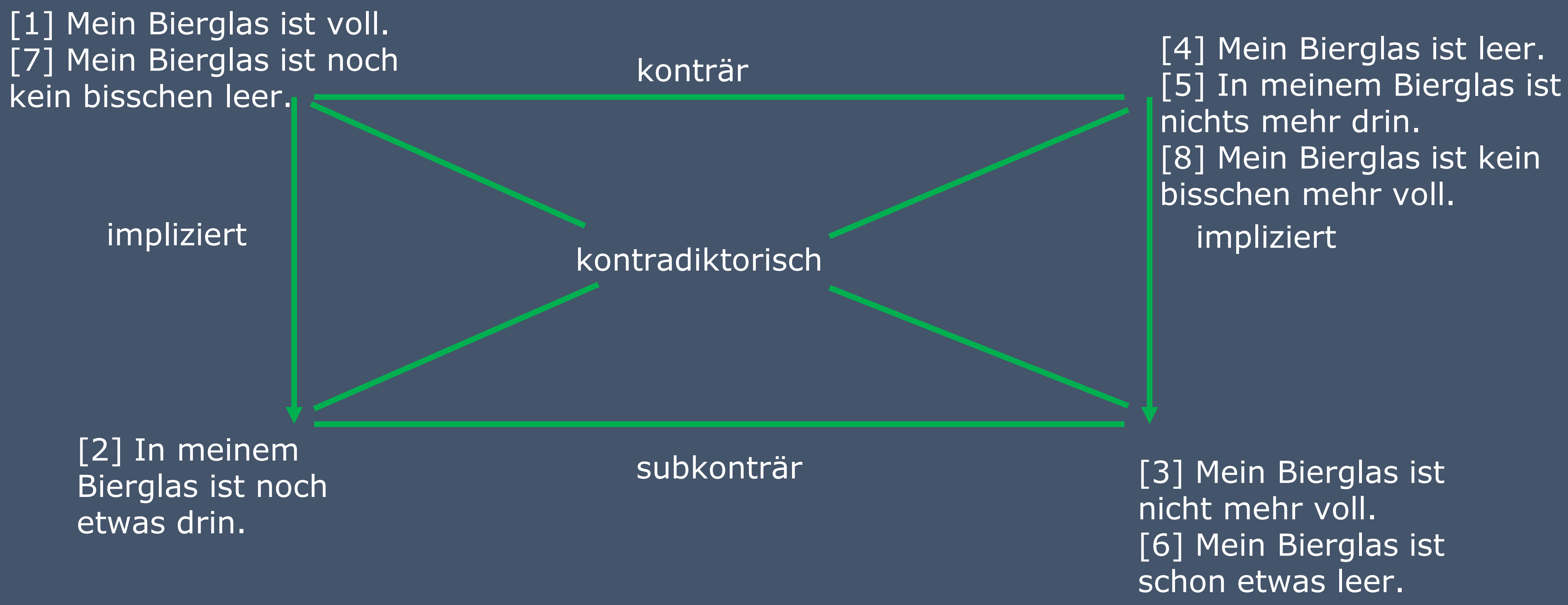
[5] „In meinem Bierglas ist nichts mehr drin.“

[6] „Mein Bierglas ist schon etwas leer.“

[7] „Mein Bierglas ist noch kein bisschen leer.“

[8] „Mein Bierglas ist kein bisschen mehr voll.“

S. 84, Nr. 5 – Lösung



Das logische Quadrat in der Prädikatenlogik – ein Gegenbeweis I

Beweisziel: Aristoteles' Urteile bilden kein logisches Quadrat in PL.

Beweisstrategie:

- Wenn Aristoteles' Urteile in PL ein logisches Quadrat bilden, impliziert das a-Urteil das i-Urteil
- Das würde formal heißen: $\{\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\} \vDash \exists x\,(Fx \land Gx)$
- Man kann aber zeigen, dass $\{\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\} \nvDash \exists x\,(Fx \land Gx)$
- Also bilden Aristoteles' Urteile in PL kein logisches Quadrat!

→ zu zeigen: $\{\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\} \nvDash \exists x\,(Fx \land Gx)$

Durch Definition von „$\vDash$": Es gibt ein M und ein v, sodass

$M \Vdash_v \forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$, aber $M \nVdash_v \exists x\,(Fx \land Gx)$

Das logische Quadrat in der Prädikatenlogik – ein Gegenbeweis II

zu zeigen: Es gibt ein M und ein v, sodass

$M \Vdash_v \forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$, aber $M \nVdash_v \exists x\,(Fx \wedge Gx)$

<u>Gegenmodell</u>: $M = \langle D, I \rangle$ mit

Gegenmodelle sind nur möglich, weil leere Extensionen erlaubt sind!

$D = \{\text{Klaus}, \text{Bernd}\}$	$v(x) = \text{Klaus}$	$v(y) = \text{Bernd}$
$I(F) = \{\}$	$I(G) = \{\}$	$M \Vdash Fx \rightarrow Gx$
$M \nVdash Fx$	$M \nVdash Gx$	$M \Vdash Fy \rightarrow Gy$
$M \nVdash Fy$	$M \nVdash Gy$	$M \nVdash Fx \wedge Gx$
$M \Vdash \forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	$M \nVdash \exists x\,(Fx \wedge Gx)$	

q. e. d.

Das logische Quadrat in der Prädikatenlogik?

Alle S sind P. $\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$

$\sim\exists x\, (Fx \land Gx)$ Kein S ist P.

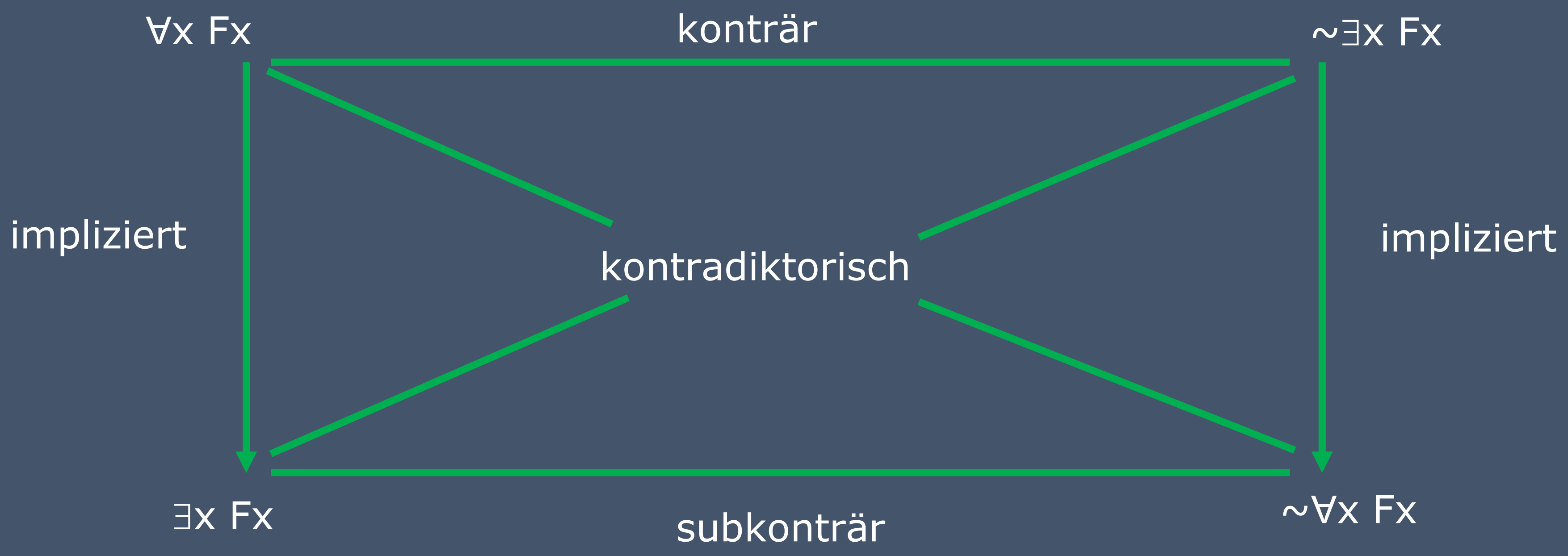
kontradiktorisch

Einige S sind P. $\exists x\, (Fx \land Gx)$

$\sim\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$ Einige S sind nicht P.

Aristoteles‘ Urteile ergeben genau dann ein logisches Quadrat, wenn <u>Prädikate mit leeren Extensionen ausgeschlossen</u> sind. Aristoteles‘ Logik tut das, PL aber nicht. Deshalb gibt es in PL kein logisches Quadrat für Aristoteles‘ Urteile!

Das logische Quadrat in PL (ein Prädikat)

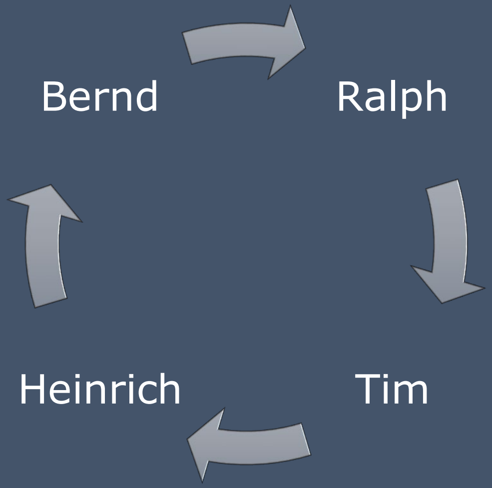


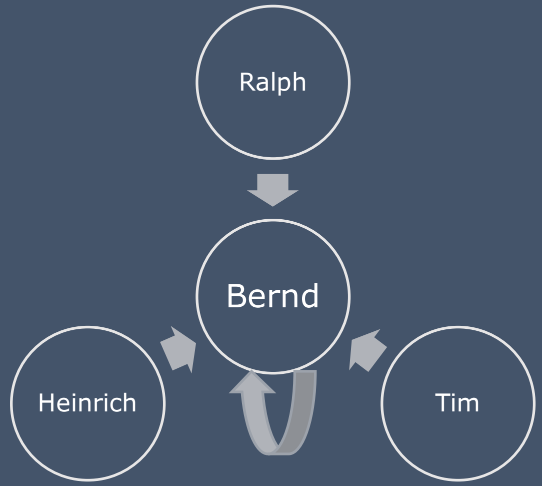
→ Da der Redebereich in PL nach Klausel 1 mindestens ein Element enthalten muss, ergibt sich ein logisches Quadrat für Quantorenformeln, die <u>eine atomare Formel</u> binden!

Der Quantorendreher

Rxy: x mag y, D = {Bernd, Ralph, Tim, Heinrich}

Formel	∀x∃y Rxy	∃y∀x Rxy
Formal übersetzt	Für alle x gibt es mindestens ein y, sodass x in Relation zu y steht.	Es gibt mindestens ein y, sodass für alle x gilt: x steht in Relation zu y.
Normalsprachlich	Alle mögen jemanden.	Es gibt jemanden, den alle mögen.





→ „∃y∀x Rxy“ impliziert „∀x∃y Rxy“, aber nicht andersherum!

PL-Tableaux

PL-Tableaux

– funktionieren analog zu AL-Tableaux:
  - Funktionsweise → indirekter Beweis
  - Ablauf: Beweisziel, Regeln anwenden, Kreuze suchen, …
  - Schluss- vs. Formel-Tableaux
  - Regeln zum Auflösen der Junktoren
– Haben drei zusätzliche Regeln:
  - Durchtauschen von Quantoren
  - Existentielle Spezialisierung
  - Universelle Spezialisierung

Existentielle Spezialisierung (ES)

Die existentielle Spezialisierung

- Erlaubt, den Existenzquantor einer Formel aufzulösen
- Fußt auf dieser Idee:
  - Wir deuten den Existenzquantor als „für mindestens ein Ding gilt:“
  - Wenn etwas aber für mindestens einen Gegenstand im Redebereich gilt, dann gilt es für einen nicht weiter bestimmten Gegenstand
- Funktioniert so:
  - Man löscht den aufzulösenden Existenzquantor samt danebenstehender Variable
  - Man ersetzt alle vom Existenzquantor gebundenen Variablen durch eine Variable, die auf dem Ast noch nicht ungebunden vorkam (ggf. durch dieselbe)

Existentielle Spezialisierung - Beispiele

$\exists x\, Fx$

|

Fx

$\exists x\, (Fx \land Gx)$

|

$Fx \land Gx$

$\exists x \forall y\, (Fx \rightarrow Gy)$

|

$\forall y\, (Fx \rightarrow Gy)$

$\exists x \exists y\, (Fx \lor Gy)$

|

$\exists y\, (Fx \lor Gy)$

|

$Fx \lor Gy$

Hier y, weil x bereits auf dem Ast ungebundenvorkommt!

Universelle Spezialisierung (US)

Die universelle Spezialisierung

- Erlaubt, den Allquantor einer Formel aufzulösen
- Fußt auf dieser Idee:
  - Wir deuten den Allquantor als „für alle Dinge gilt:“
  - Wenn etwas aber für alle Gegenstände im Redebereich gilt, dann gilt es für einen beliebigen Gegenstand – egal, welchen
- Funktioniert so:
  - Man löscht den aufzulösenden Allquantor samt danebenstehender Variable
  - Man ersetzt alle vom Allquantor gebundenen Variablen durch eine beliebige Variable (und ggf. durch dieselbe)

Universelle Spezialisierung - Beispiele

$\forall x\, Fx$

|

Fx

$\forall x\, (Fx \wedge Gx)$

|

$Fx \wedge Gx$

$\forall x \forall y\, (Fx \vee Gy)$

|

$\forall y\, (Fx \vee Gy)$

|

$Fx \vee Gx$

Hier x oder y, weil man in jede Variable spezialisieren kann!

Durchtauschen (DT)

Durchtauschen

- Erlaubt, jede Formel mit Allquantor durch eine Formel mit Existenzquantor zu ersetzen (und andersherum)
- Benötigen wir, um Formeln, die mit „$\sim\forall$“ oder „$\sim\exists$“ anfangen, auflösen zu können $\rightarrow$ DT + US/ES
- Fußt auf folgenden Gedanken:
  - „nicht alle“ bedeutet „mindestens einer nicht“
  - „keiner“ bedeutet „alle nicht“

Durchtauschen – Beispiele

$\sim\forall x\ Fx$	$\sim\exists x\ (Fx \wedge Gx)$	$\sim\forall x\exists y\ (Fx \vee Gy)$	$\sim\forall xyz\ Rxyz$
$\exists x\sim\ Fx$	$\forall x\sim\ (Fx \wedge Gx)$	$\exists x\sim\exists y\ (Fx \vee Gy)$	$\exists xyz\sim\ Rxyz$
$\sim Fx$	$\sim(Fx \wedge Gx)$	$\sim\exists y\ (Fx \vee Gy)$	$\exists yz\sim\ Rxyz$
		$\forall y\sim\ (Fx \vee Gy)$	$\exists z\sim\ Rxyz$
		$\sim(Fx \vee Gx)$	$\sim\ Rxyz$

Die Tableau-Methode: Strategien

Pflicht:

- So kleinschrittig wie eben möglich vorgehen
- Kreuze machen, sobald sich ein Widerspruch zwischen zwei wffs auf demselben Ast ergibt
- Formeln, die mit „~∀“ oder „~∃“ anfangen, durchtauschen
- Existentielle Spezialisierung immer in eine Variable, die noch nicht ungebunden auf dem Ast vorkommt

Dringende Empfehlungen:

- Erst diejenigen Formeln auflösen, für deren Auflösung man keine Fallunterscheidung benötigt
- US immer in bereits vorhandene Variable (falls möglich)
- Erst alle existentiellen Spezialisierungen, dann die universellen
- Negieren von Formeln, die nicht mit Negation oder Quantor beginnen: Klammern vorne und hinten!
- Jede aufgelöste Formel abhaken (bspw. mit „✓“)

Die Tableau-Methode: modus Barbara

<u>Aufgabe</u>: Beweist mithilfe der Tableau-Methode die Gültigkeit des Barbara-Schlusses aus der aristotelischen Syllogistik.

Die Tableau-Methode: modus Barbara - Beispiel

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x ist-ein-Lebewesen   Hx: x ist-ein-Mensch

Gx: x ist-sterblich

Bar-	P1	Alle Lebewesen sind sterblich.	$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
bar-	P2	Alle Menschen sind Lebewesen.	$\forall x\ (Hx \rightarrow Fx)$
a	K	Alle Menschen sind sterblich.	$\forall x\ (Hx \rightarrow Gx)$

zz: $\{\forall x\,(Fx \rightarrow Gx),\ \forall x\,(Hx \rightarrow Fx)\} \vDash \forall x\,(Hx \rightarrow Gx)$

(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Prämisse 1
(2)	$\forall x(Hx \rightarrow Fx)$	Prämisse 2
(3)	$\sim\forall x(Hx \rightarrow Gx)$	reductio-Hypothese
(4)	$\exists x \sim (Hx \rightarrow Gx)$	(3) DT
(5)	$\sim(Hx \rightarrow Gx)$	(4) ES: x/x
(6)	Hx	(5) $(\sim\rightarrow)$
(7)	$\sim Gx$	(5) $(\sim\rightarrow)$
(8)	$Fx \rightarrow Gx$	(1) US: x/x
(9)	$Hx \rightarrow Fx$	(2) US: x/x
(10)	$\sim Fx$ Gx × (7),(10)	(8) $(\rightarrow)$
(11)	$\sim Hx$ × (6),(11) Gx × (7),(11)	(9) $(\rightarrow)$

q.e.d.

DIE TABLEAUMETHODE: BÄRENSCHLUSS – BEISPIEL

Abkürzungsverzeichnis:
Bx: x ist-ein-Bär   v(x) = Ned
Px: x ist-pelzig

Alle Bären sind pelzig.	$\forall y\ (By \rightarrow Py)$
Ned ist ein Bär.	Bx
___	___
Also ist Ned pelzig.	Px

zz: $\{\forall y\,(By \rightarrow Py), Bx\} \vDash Px$

(1)	$\forall y(By \rightarrow Py)$		Prämisse 1
(2)	Bx		Prämisse 2
(3)	$\sim Px$		reductio-Hypothese
(4)	$Bx \rightarrow Px$		(1) US: x/y
(5)	$\sim Bx$	Px	(4) $(\rightarrow)$
	$\times$ (2),(5)	$\times$ (3),(5)	

q.e.d.

TABLEAUX – AUFGABE I

Aufgabe: Beweist bis zur nächsten Sitzung mithilfe eines PL-Tableaus die Problematik des Quantorendrehers, indem ihr zeigt, dass die in Frage stehenden Formeln nicht äquivalent sind. Erklärt außerdem, wie man am Tableau erkennen kann, dass „Jemand wird von allen gemocht“ „Alle mögen jemanden“ impliziert.

Tableaux – Aufgabe II

Aufgabe: Zeigt mithilfe eines Tableaus, dass der Barbari-Schluss nicht PL-gültig ist. Erklärt, wieso dieser Schluss zwar in der Aristotelischen Syllogistik gültig ist, in PL aber nicht; nehmt dabei Bezug aufs logische Quadrat.

Vokabeln

- Kategorische Urteile (Namen + Übersetzungen)
- Logisches Quadrat und PL
- Quantorendreher
- Durchtauschen
- Existentielle Spezialisierung
- Universelle Spezialisierung

Aufgaben

- Alles bisher Gemachte wiederholen
- Fragen sammeln (jeder Art!)
- Tableaux-Aufgaben

Bis Nächste Woche!