Tutorium Logik

Prädikatenlogik: PL-Semantik

Agenda

- Aufgaben: Syntax von PL
- Semantik von PL
- Übersetzen

S. 93, Nr. 2 + 3

Nr. 2:

[1] „$\sim\forall z \sim Fz \land \forall y \sim Gy$“ wird zu „$\exists z\, Fz \land \sim\exists y\, Gy$“

[2] „$\forall x \sim\forall y \sim(Fx \rightarrow Ryx)$“ wird zu „$\sim\exists x \sim\exists y\, (Fx \rightarrow Ryx)$“

Nr. 3:

$\forall x\, [(Fx \rightarrow \exists y\, [Rxy])] \rightarrow (Fx \rightarrow \exists x\, [Ryx])$

PL-Semantik – Klauseln 1 und 2

Ein PL-Modell ist ein geordnetes Paar ⟨D,I⟩, für das gilt:

(1) D ist eine nichtleere Menge;

(2) I ist eine (Interpretations-)Funktion, die jedem n-stelligen Prädikatsymbol eine Menge von n-Tupeln über D zuordnet.

PL-Semantik – Der Redebereich

(1) D ist eine nichtleere Menge;

<u>Der Redebereich</u>

– Ist die Menge derjenigen Gegenstände, über die man in einer spezifischen Situation spricht
– Ist, wenn nicht weiter spezifiziert, die Menge aller existierenden (Einzel-)Gegenstände
– Enthält (in PL) immer mindestens einen Gegenstand!
– Wird mit „D“ für „domain“ („Definitionsbereich“) abgekürzt
– Beispiel: D = {Vitus, Luca, Marvin, Leonie, Finn, Tobias}

PL-Semantik – Die Interpretationsfunktion

(2) I ist eine (Interpretations-)Funktion, die jedem n-stelligen Prädikatsymbol eine Menge von n-Tupeln über D zuordnet.

Eine Menge von n-Tupeln über D ist eine Menge, deren Elemente ausschließlich Tupel mit n Komponenten sind, welche alle Elemente von D sind.

→ Jedes Prädikatsymbol kriegt seine Extension zugewiesen!

Konvention: „x“ kürzt „⟨x⟩“ ab.

PL-Semantik – Die Interpretationsfunktion

Sei M = ⟨D, I⟩ mit D = {Vitus, Philsem, Schloss, Finn}.

Fx: x befindet sich in Münster
Gx: x ist ein Gebäude
Rxy: ist kleiner als oder gleich groß wie y

I(F) = { Vitus, Philsem, Schloss, Finn }

I(G) = { Philsem, Schloss }

I(R) = { ⟨Vitus, Vitus⟩, ⟨Finn, Finn⟩, ⟨Philsem, Philsem⟩, ⟨Schloss, Schloss⟩,
⟨Vitus, Finn⟩, ⟨Finn, Philsem⟩, ⟨Philsem, Schloss⟩,
⟨Vitus, Philsem⟩, ⟨Finn, Philsem⟩, ⟨Vitus, Schloss⟩,
⟨Finn, Schloss⟩
}

PL-Semantik: Wie sieht ein Modell aus?

$M = \langle D, I \rangle$

$M = \langle$ {Vitus, Philsem, Schloss, Finn},
{⟨F, {Vitus, Philsem, Schloss, Finn}⟩,
⟨G, {Philsem, Schloss}⟩,
⟨R, {⟨Vitus, Vitus⟩, ⟨Finn, Finn⟩, ⟨Philsem, Philsem⟩, ⟨Schloss, Schloss⟩, ⟨Vitus, Finn⟩, ⟨Finn, Philsem⟩, ⟨Philsem, Schloss⟩, ⟨Vitus, Philsem⟩, ⟨Finn, Philsem⟩, ⟨Vitus, Schloss⟩, ⟨Finn, Schloss⟩}⟩, …⟩

D Redebereich

I Interpretationsfunktion (Extensionen)

PL-Semantik: Belegungen

Eine Belegung der Variablen von PL ist eine Funktion, die jeder Variable ein Element aus D zuordnet.

Belegungen nennen wir v, w etc. (vgl. „valuation").

Der *v*-Wert von *x* wird notiert als „*v*(*x*)".

→ So wie wir singulären Termen Denotate zuweisen, weisen Belegungen Individuenvariablen Gegenstände aus dem Redebereich zu

PL-Semantik: Belegungsvarianten

Die Belegung w ist eine x-Variante zur Belegung v gdw w von v höchstens* darin abweicht, dass $w(x) \neq v(x)$.

* Jede Belegung ist eine Belegungsvariante von sich selbst!

PL-Semantik: Belegungen – Beispiel

Sei D = {Vitus, Philsem, Schloss, Finn}.

Sei v = {⟨x, Vitus⟩ , ⟨y, Philsem⟩,
⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}

Nun gibt es – neben v selbst – drei x-Varianten zu v:

v‘ = {⟨x, Philsem⟩, ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}
v‘‘ = {⟨x, Schloss⟩ , ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}
v‘‘‘ = {⟨x, Finn⟩, ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}

PL-Semantik: Die Erfüllungsrelation

Wir lesen $M \Vdash_v \alpha$ als …

(1) „M erfüllt α unter v“

(2) „M macht α unter der Belegung v wahr“ <u>oder</u>

(3) „α ist unter der Belegung v wahr in M“.

<u>Achtung</u>:

„$\Vdash$” wird verwendet, um über Wahrheit in einem *spezifischen* Modell unter einer *spezifischen* Belegung zu reden.

„$\vDash$” wird verwendet, um über Wahrheit in *allen* Modellen und *allen* Belegungen (Kon-Sequenzen, Allgemeingültigkeit) zu reden.

PL-Semantik: Die Erfüllungsrelation

Sei ϕ ein n-stelliges Prädikatsymbol, v eine Belegung, M ein PL-Modell, und seien α und β wffs. Dann gilt:

(1) $M \Vdash_v \phi x_1 \ldots x_n$ gdw $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n) \rangle \in I(\phi)$

(2) $M \Vdash_v \neg\alpha$ gdw $M \nVdash_v \alpha$

(3) $M \Vdash_v (\alpha \wedge \beta)$ gdw $M \Vdash_v \alpha$ und $M \Vdash_v \beta$

(4) $M \Vdash_v \forall x\, \alpha$ gdw für jede x-Variante w zu v gilt: $M \Vdash_w \alpha$.

PL-SMANTIK – ATOMARE FORMELN

Wenn ϕ ein beliebiges Prädikatsymbol und $x_1, \ldots, x_n$ beliebige Variablen sind, gilt:

(1) $M \Vdash_v \phi x_1 \ldots x_n$ gdw $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n) \rangle \in \mathrm{I}(\phi)$

Lies: Eine atomare Formel – bestehend aus genau einem Prädikatsymbol und n Individuenvariablen – ist wahr in M unter der Belegung v genau dann, wenn derjenige n-Tupel, dessen Komponenten die Denotate der in der atomaren Formel auftretenden Variablen – in derselben Reihenfolge wie in der atomaren Formel – sind, Element der Extension von ϕ ist.

Beispiele:

$M \Vdash_v Fx$ gdw $\langle v(x) \rangle \in \mathrm{I}(F)$

$M \Vdash_w Rxy$ gdw $\langle w(x), w(y) \rangle \in \mathrm{I}(R)$

Keine Beispiele:

$M \Vdash_v Fx$ gdw $\langle x \rangle \in \mathrm{I}(F)$

$M \Vdash_w Rxy$ gdw $\langle w(y), w(x) \rangle \in \mathrm{I}(R)$

PL-Semantik – Negation und Konjunktion

Wenn α und β beliebige wohlgeformte Formeln sind, gilt:

(2) $M \Vdash_v \neg\alpha$ gdw $M \nVdash_v \alpha$

(3) $M \Vdash_v (\alpha \wedge \beta)$ gdw $M \Vdash_v \alpha$ und $M \Vdash_v \beta$

Lies:

⌜~α⌝	ist wahr in *M* unter *v*	gdw	α dort falsch ist.
⌜(α ∧ β)⌝	ist wahr in *M* unter *v*	gdw	α dort wahr ist und β dort wahr ist.

PL-SEMANTIK – MEHR JUNKTOREN

Aus der Definition zur PL-Semantik ergeben sich – ganz analog zu AL – die folgende Regeln:

$M \Vdash_v (\alpha \vee \beta)$ gdw $M \Vdash_v \alpha$ und/oder $M \Vdash_v \beta$

$M \Vdash_v (\alpha \rightarrow \beta)$ gdw $M \nVdash_v \alpha$ und/oder $M \Vdash_v \beta$

$M \Vdash_v (\alpha \equiv \beta)$ gdw $M \Vdash_v \alpha$ und $M \Vdash_v \beta$ oder
$M \nVdash_v \alpha$ und $M \nVdash_v \beta$

$M \Vdash_v (\alpha \nabla \beta)$ gdw $M \Vdash_v \alpha$ und $M \nVdash_v \beta$ oder
$M \nVdash_v \alpha$ und $M \Vdash_v \beta$

PL-Semantik – Allquantor

Wenn α eine beliebige wohlgeformte Formeln ist, gilt:

(2) $M \Vdash_v \forall x\alpha$ gdw für jede *x*-Variante *w* zu *v* gilt: $M \Vdash_w \alpha$

Lies:

⌜∀xα⌝ ist wahr in *M* unter *v* gdw α wahr ist in *M* unter *jeder x*-Variante w zu v.

PL-Semantik: Belegungen – Beispiel

Sei D = {Vitus, Philsem, Schloss, Finn}.

Sei v = {⟨x, Vitus⟩ , ⟨y, Philsem⟩,
⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}

Nun gibt es – neben v selbst – drei x-Varianten zu v:

v‘ = {⟨x, Philsem⟩, ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}
v‘‘ = {⟨x, Schloss⟩ , ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}
v‘‘‘ = {⟨x, Finn⟩, ⟨y, Philsem⟩, ⟨z, Schloss⟩, ⟨z‘, Finn⟩, …}

PL-Semantik: Allquantor

Sei $M = \langle D, I \rangle$ mit

$D \quad = \{$Vitus, Philsem, Schloss, Finn$\}$ und

$I(G) = \{$Philsem, Schloss$\}$.

Sei $v = \{\langle x, \text{Vitus}\rangle, \langle y, \text{Philsem}\rangle, \langle z, \text{Schloss}\rangle, \langle z', \text{Finn}\rangle, \ldots\}$

Gx: x ist ein Gebäude

Gilt $M \Vdash_v \forall x\, Gx$?

Nein! Denn …

$M \nVdash_v Gx$, da $v(x)$=Vitus, Vitus $\notin I(G)$,

$M \Vdash_{v'} Gx$, da $v'(x)$=Philsem, Philsem $\in I(G)$,

$M \Vdash_{v''} Gx$, da $v''(x)$=Schloss, Schloss $\in I(G)$,

$M \nVdash_{v'''} Gx$, da $v'''(x)$=Finn, Finn $\notin I(G)$!

→ v selbst reicht schon als Gegenbeispiel aus!

PL-Semantik: Allquantor

Sei $M = \langle D, I \rangle$ mit

$D = \{\text{Vitus, Philsem, Schloss, Finn}\}$ und

$I(G) = \{\text{Philsem, Schloss}\}$.

Sei $v = \{\langle x, \text{Vitus}\rangle, \langle y, \text{Philsem}\rangle, \langle z, \text{Schloss}\rangle, \langle z', \text{Finn}\rangle, \ldots\}$

Rxy: x ist kleiner als oder gleich groß wie y

Gilt $M \Vdash_v \forall x\, Rxz$?

Ja! Denn …

$M \Vdash_v Rxz$, da $v(x)=\text{Vitus}$, $v(z)=\text{Schloss}$, $\langle \text{Vitus, Schloss}\rangle \in I(R)$,

$M \Vdash_{v'} Rxz$, da $v'(x)=\text{Philsem}$, $v(z)=\text{Schloss}$, $\langle \text{Philsem, Schloss}\rangle \in I(R)$,

$M \Vdash_{v''} Rxz$, da $v''(x)=\text{Schloss}$, $v(z)=\text{Schloss}$, $\langle \text{Schloss, Schloss}\rangle \in I(R)$,

$M \Vdash_{v'''} Rxz$, da $v'''(x)=\text{Finn}$, $v(z)=\text{Schloss}$, $\langle \text{Finn, Schloss}\rangle \in I(R)$!

Quantorformeln – Faustregeln

Voraussetzung: Der Redebereich umfasst höchstens abzählbar unendlich viele Gegenstände.

Eine Allquantorformel ist wahr genau dann, wenn die Formel ohne Allquantor für jeden Gegenstand aus dem Redebereich, den man der Variable zuweist, wahr ist.

Eine Existenzquantorformel ist wahr genau dann, wenn die Formel ohne Existenzquantor für mindestens einen Gegenstand aus dem Redebereich, den man der Variable zuweist, wahr ist.

Semantik - Beispiele

Sei Sei $M = \langle D, I \rangle$ mit $D = \{\text{Bernd, Karl, Torsten}\}$.

$v(x) = \text{Bernd}$ $\quad I(F) = \{\text{Karl}\}$ $\quad I(G) = \{\text{Bernd, Karl, Torsten}\}$

$v(y) = \text{Karl}$ $\quad$ …

$v(z) = \text{Torsten}$

…

$M \Vdash_v Fx$ $M \Vdash_v Gx$	$M \Vdash_v Fy$ $M \Vdash_v Gy$	$M \Vdash_v Fz$ $M \Vdash_v Gz$	atomar
$M \Vdash_v {\sim}Fx \wedge Gx)$ $M \Vdash_v {\sim}(Fx \veebar Gx)$	$M \Vdash_v Fy \rightarrow Gy$ $M \Vdash_v {\sim}(Fy \equiv {\sim}Gy)$	$M \Vdash_v Fz \vee {\sim}Gy$ $M \Vdash_v {\sim}(Fz \rightarrow Gy)$	komplex
$M \Vdash_v \forall x\, Fx$ $M \Vdash_v \exists x\, Fx$	$M \Vdash_v \forall x\, Gx$ $M \Vdash_v \exists x\, Gx$	$M \Vdash_v \forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$ $M \Vdash_v \exists x\, (Fx \wedge Gx)$	komplex (Quantor)

Semantik - Beispiele

Sei Sei $M = \langle D, I \rangle$ mit $D = \{\text{Bernd, Karl, Torsten}\}$.

$v(x)$ = Bernd $\qquad I(F) = \{\text{Karl}\} \qquad I(G) = \{\text{Bernd, Karl, Torsten}\}$

$v(y)$ = Karl $\qquad\qquad\qquad\qquad$ …

$v(z)$ = Torsten

…

$M \nVdash_v Fx$ $M \Vdash_v Gx$	$M \Vdash_v Fy$ $M \Vdash_v Gy$	$M \nVdash_v Fz$ $M \Vdash_v Gz$	atomar
$M \Vdash_v {\sim}Fx \wedge Gx)$ $M \nVdash_v {\sim}(Fx \overline{\vee} Gx)$	$M \Vdash_v Fy \rightarrow Gy$ $M \Vdash_v {\sim}(Fy \equiv {\sim}Gy)$	$M \nVdash_v Fz \vee {\sim}Gy$ $M \nVdash_v {\sim}(Fz \rightarrow Gy)$	komplex
$M \nVdash_v \forall x\, Fx$ $M \Vdash_v \exists x\, Fx$	$M \Vdash_v \forall x\, Gx$ $M \Vdash_v \exists x\, Gx$	$M \Vdash_v \forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$ $M \Vdash_v \exists x\, (Fx \wedge Gx)$	komplex (Quantor)

S. 96/97, Nr. 1

Sei $D = \{\text{Rom, Verona, Neapel}\}$; sei außerdem

$I(F) = \{\text{Rom}\}$,

$I(G) = \{\ \}$,

$I(H) = \{\text{Rom, Neapel}\}$,

$I(R) = \{\langle\text{Neapel, Rom}\rangle, \langle\text{Rom, Verona}\rangle, \langle\text{Neapel, Verona}\rangle\}$

$v(x) = \text{Rom}$, $v(y) = \text{Neapel}$, $v(z) = \text{Verona}$.

Macht das Modell die untenstehenden Formeln wahr?

Gx	Fz	Fx	Rxy
Ryx	Rzz	$Hy \wedge Hx$	$Fz \vee Hy$
$\sim Gy$	$\sim Gy \wedge Fx$	$Rzx \wedge Rxz$	

S. 96/97, Nr. 1

Sei $D = \{\text{Rom, Verona, Neapel}\}$; sei außerdem

$I(F) = \{\text{Rom}\}$,

$I(G) = \{\ \}$,

$I(H) = \{\text{Rom, Neapel}\}$,

$I(R) = \{\langle\text{Neapel, Rom}\rangle, \langle\text{Rom, Verona}\rangle, \langle\text{Neapel, Verona}\rangle\}$

$v(x) = \text{Rom}$, $v(y) = \text{Neapel}$, $v(z) = \text{Verona}$.

Macht das Modell die untenstehenden Formeln wahr?

$M \Vdash_v Gx$	$M \nVdash_v Fz$	$M \Vdash_v Fx$	$M \nVdash_v Rxy$
$M \Vdash_v Ryx$	$M \nVdash_v Rzz$	$M \Vdash_v Hy \wedge Hx$	$M \Vdash_v Fz \vee Hy$
$M \Vdash_v \sim Gy$	$M \Vdash_v \sim Gy \wedge Fx$	$M \nVdash_v Rzx \wedge Rxz$	

Übersetzen von Allaussagen

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x ist-eine-Fliege	Rxy: x liebt y	Hx: x ist-hübsch
Ix: x ist-ein-Insekt	v(y) = Yvonne	

Normalsprachlicher Satz	Übersetzung in PL
Alle Fliegen sind Insekten.	$\forall x\ (Fx \rightarrow Ix)$
Alle, die Yvonne lieben, sind hübsch.	$\forall x\ (Rxy \rightarrow Hx)$
Alle, die Yvonne liebt, sind hübsch.	$\forall x\ (Ryx \rightarrow Hx)$

Faustregel: Sätze der Form „Alle F sind G" übersetzen wir mit Konditional: „$\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$".

Übersetzen von Existenzaussagen

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x ist-eine-Fliege	Rxy: x liebt y	Hx: x ist-hübsch
Ix: x ist-ein-Insekt	v(y) = Yvonne	

Normalsprachlicher Satz	Übersetzung in PL
Mindestens eine Fliege ist ein Insekt.	$\exists x\ (Fx \land Ix)$
Mindestens eine:r, der/die Yvonne liebt, ist hübsch.	$\exists x\ (Rxy \land Hx)$
Mindestens eine:r, den/die Yvonne liebt, ist hübsch.	$\exists x\ (Rky \land Hx)$

Faustregel: Sätze der Form „Einige F sind G" übersetzen wir mit Konjunktion: „$\exists x\ (Fx \land Gx)$"

S. 97, Nr. 4

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x geht-es-gut	v(x) = Uwe
Rxy: x ist-eifersüchtig-auf y	v(y) = Gabi
R'xy: x liebt y	v(z) = Jens

Normalsprachlicher Satz	Übersetzung in PL
Jens liebt sich selbst.	$R'zz$
Uwe liebt Gabi, aber Gabi liebt Uwe nicht.	$R'xy \wedge \sim R'yx$
Jens geht es gut, aber Uwe geht es nicht gut.	$Fz \wedge \sim Fx$
Wenn Gabi Uwe liebt oder umgekehrt, dann ist Jens auf Uwe eifersüchtig.	$(R'yx \vee R'xy) \rightarrow Rzx$

S. 100, Nr. 1

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x geht-es-gut	R'xy: x liebt y	v(y) = Gabi
Rxy: x ist-eifersüchtig-auf y	v(x) = Uwe	v(z) = Jens

Normalsprachlicher Satz	Übersetzung in PL
Alle lieben Uwe.	$\forall y\ R'yx$
Wenn alle Jens lieben, dann liebt Jens sich auch selbst.	$\forall x\ (R'xz \rightarrow R'zz)$
Keiner liebt Jens.	$\sim\exists x\ R'xz$
Wenn Uwe Gabi liebt, dann gibt es jemanden, der eifersüchtig ist auf Uwe.	$R'xy \rightarrow \exists y\ Ryx$
Gabi liebt alle und ist auf keinen eifersüchtig.	$\forall x\ R'yx \land \sim\exists x\ Ryx$
Nicht allen geht es gut, aber doch manchen.	$\sim\forall x\ Fx \land \exists x\ Fx$

S. 105, Nr. 1

Abkürzungsverzeichnis:

Fx: x geht es gut	v(x) = Uwe
Rxy: x ist eifersüchtig auf y	v(y) = Gabi
R‘xy: x liebt y	v(z) = Jens

Normalsprachlicher Satz	Übersetzung in PL
Es gibt jemanden, auf den Uwe eifersüchtig ist.	$\exists y\ Rxy$
Es gibt jemanden, der auf Uwe eifersüchtig ist.	$\exists y\ Ryx$
Wenn alle Gabi lieben, dann gibt es jemanden, den alle lieben.	$\forall x\ R'xy \rightarrow \exists x \forall y\ R'yx$
Nicht alle, die lieben, sind eifersüchtig, und nicht alle, die eifersüchtig sind, lieben.	$\sim\forall x\ (\exists y\ R'xy \rightarrow \exists z\ Rxz) \wedge \sim\forall x\ (\exists y\ Rxy \rightarrow \exists z\ R'xz)$

Aufgaben

- Wiederholen:
  - Tableaux-Regeln für AL
  - Umformen von Quantoren
- Lesen:
  - 4. Auflage: S. 93-98
  - 5. Auflage: S. 101-105
- Übungen:
  - 4. Auflage: S. 89, Nr. 4; S. 95, Nr. 1
  - 5. Auflage: S: 97, Nr. 4; S. 103, Nr. 1

VOKABELN

- PL-Semantik
- Modell, Redebereich, Denotation, Extension, Valuation

Bis nächste Woche!