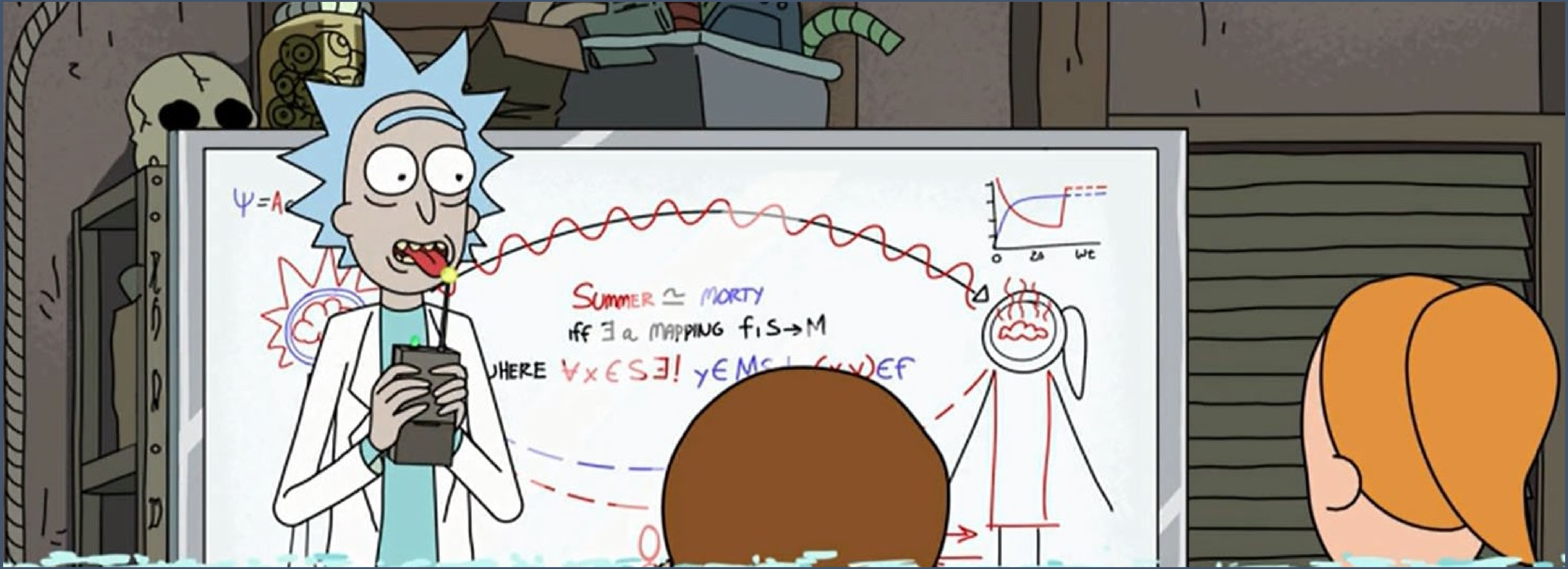
Tutorium Logik

Prädikatenlogik: PL-Syntax

Agenda

- Syntax von PL
  - Alphabet
  - Atomare Formeln
  - Wohlgeformte Formeln
  - Allquantor und Existenzquantor
- Relationseigenschaften

Prädikatenlogik und ihre Anwendung



Singuläre Terme

Singuläre Terme

- Sind sprachliche Ausdrücke, mit denen man auf höchstens einen Gegenstand (das Denotat) Bezug nehmen kann
- Sind (in der Philosophie) meistens
  - Eigennamen
    - Namen von Personen, Tieren oder Objekten
    - Beispiele: „Vitus“, „Knut“, „Gustav Grün“, „Pegasus“
  - Kennzeichnungen
    - eindeutige Beschreibungen, oft mit bestimmtem Artikel (der/die/das)
    - Beispiele: „die amtierende Bundeskanzlerin“, „das geflügelte Pferd“

„auf höchstens einen Gegenstand“ bedeutet „auf genau einen Gegenstand ODER „auf gar keinen Gegenstand“!

Prädikate

Ein Prädikat

- Ergibt in Verbindung mit einem singulären Term einen vollständigen deutschen Aussagesatz
- erfüllt immer genau eine dieser beiden Funktionen:

1. Es weist einem Gegenstand eine Eigenschaft zu (einstelliges Prädikat)
2. Es setzt mindestens zwei Gegenstände miteinander in Beziehung. (n-stelliges Prädikat)

Vitus ist Logiktutor.
Vitus steht.

zweistelliges Prädikat

Vitus mag Knut.
Vitus mag Knut mehr als RWE.

dreistelliges Prädikat

Prädikate - Beispiele

Satz	Prädikat	Name(n)
Peter ist klug.	_ ist-klug	Peter
Bernd schreit.	_ schreit	Bernd
Hugo liebt Bernd.	_ liebt _	Hugo, Bernd
Berlin liegt östlich von Hamburg.	_ liegt-östlich-von _	Berlin, Hamburg
Carsten schubste Hugo gegen Bernd.	_ schubste _ gegen _	Carsten, Hugo, Bernd

Prädikate – Extensionen

Die Extension eines Prädikats ist die Menge der n-Tupel, deren Komponenten in Verbindung mit dem Prädikat einen wahren Satz ergeben.

Konvention: Einer-Tupel deuten wir als ihre Komponenten: „<Vitus>“ wird zu „Vitus“.

Prädikat	Extension
_ ist-Logiktutor-an-der-WWU	{Vitus, Luca, Marvin, Lena, Raphael, Tobias}
_ befindet-sich-im-208	{Vitus, Marcel, Muriel, Marlena, …}
_ liegt-westlich-von _	{<Hamburg, Berlin>, <Münster, Dresden>, …}
_ ist-abgelenkt	{} (auch notiert als „∅“)

Relation

Die Extension eines Prädikats mit mehr als einer Leerstelle nennen wir „Relation“.

Der Redebereich

Der Redebereich

- Ist die Menge derjenigen Gegenstände, über die man in einer spezifischen Situation spricht
- Ist, wenn nicht weiter spezifiziert, die Menge aller existierenden Gegenstände
- Enthält (in PL) immer mindestens einen Gegenstand
- Wird mit „D“ für „domain (of discourse)“ abgekürzt
- Beispiel: D = {Vitus, Marcel, Muriel, Marlena, …}

S. 90, Nr. 2

D = {Oslo, Hamburg, München, Verona, Rom}

[1] {Oslo, Rom}

[2] {<Verona, Rom>, <München, Verona>, <München, Rom>, <Hamburg, München>, <Hamburg, Verona>, <Hamburg, Rom>, <Oslo, Hamburg>, <Oslo, München>, <Oslo, Verona>, <Oslo, Rom>}

[4] {<Hamburg, München>, <München, Hamburg>, <Verona, Rom>, <Rom, Verona>}

PL-Syntax: Alphabet

Junktoren	„~“, „∧“
Klammern und Häkchen	„)“, „(„, „‘“
n-stellige Prädikatssymbole	„F“, „G“, „R“, …
Individuenvariablen	„x“, „y“, „z“, …
Der Allquantor	„∀“

Das Häkchen in PL funktioniert wie das Sternchen in AL: F‘=G, F‘‘=H, etc.

Syntax von PL: Prädikate

Prädikate bestehen aus zwei Teilen:

	Normalsprachlich	Formal
1. Teil	Folge von Wörtern	Prädikatsymbol: „F“, „G“, „R“, …
2. Teil	Leerstelle(n)	Individuenvariable(n): „x“, „y“, „z“, …

Ein Prädikat muss, wenn man jede seiner Leerstellen mit einem singulären Term füllt, einen vollständigen deutschen Satz ergeben.

Beispiele:

– Fx: x studiert-Philosophie

– Rxy: x ist-verantwortlich-für y

Syntax von PL: Individuenkonstanten

Individuenvariablen

- Sind ungebunden das formale Gegenstück zu singulären Termen
- Treten ausschließlich nach Prädikatsymbolen auf
- Werden mit „x“, „y“, „z“ usw. abgekürzt

Beispiele:			
Prädikate	Individuenkonstanten	Formeln	Sätze
Fx: x studiert-Philosophie	v(x) = Peter	Fx	Peter studiert Philosophie.
Rxy: x ist-verantwortlich-für y	v(y) = die Schulverwaltung	Rxy	Peter ist verantwortlich für die Schulverwaltung.

Syntax von PL: Quantoren

Den Allquantor („∀“)

- Benutzen wir, um Allaussagen zu tätigen
- Lesen wir formal so vor: „Für jeden Gegenstand im Redebereich gilt:“
- Deuten wir normalsprachlich als „alle“ oder „jeder“

Den Existenzquantor („∃“)

- Benutzen wir, um Existenzaussagen zu tätigen
- Lesen wir formal so vor: „Für mindestens einen Gegenstand im Redebereich gilt:“
- Deuten wir normalsprachlich als „mindestens einer“, oder – ungenauer! –„einige“ bzw. „manche“

Syntax von PL: atomare Formeln

1. Jedes n-stellige Prädikatsymbol von PL gefolgt von n Individuenvariablen ist eine atomare Formel von PL.
2. Nichts sonst ist eine atomare Formel von PL.

→ Jede atomare Formel besteht aus genau einem Prädikatsymbol und mindestens einer Individuenvariable!

Beispiele:

Fx
Gy
} einstellige Prädikate

Rxyz dreistelliges Prädikat

Keine Beispiele:

xFx
xR
y‘G
FG

Syntax von PL: wohlgeformte Formeln I

1. Jede atomare Formel von PL ist eine wohlgeformte Formel von PL.
2. (a) Wenn α eine wff von PL ist, dann ist auch ⌜~α⌝ eine wff von PL.

   (b) Wenn α und β wohlgeformte Formeln von PL sind, dann ist auch ⌜(α ∧ β)⌝ eine wohlgeformte Formel von PL.

→ Diese beiden Klauseln sind identisch mit denen von AL.
Deshalb sind diese Formeln Beispiele für wffs:

(Rxx ∧ Fy)	~(Rxy ∧ Gy)	(Fx ∧ Gy)
~Gy	(Fx ∧ ~Gx)	~(Fx ∧ Rxy)

PL-Syntax: Mehr Junktoren

Seien α und β wohlgeformte Formeln (wffs) von PL. Dann gilt:

1. ⌜~(~α ∧ ~β)⌝ darf durch ⌜(α v β)⌝ abgekürzt werden.
2. ⌜~(α ∧ ~β)⌝ darf durch ⌜(α → β)⌝ abgekürzt werden.
3. ⌜(α → β) ∧ (β → α)⌝ darf durch ⌜(α ≡ β)⌝ abgekürzt werden.
4. ⌜(α v β) ∧ ~(α ∧ β)⌝ darf durch ⌜(α ∇ β)⌝ abgekürzt werden.

→ In AL und PL gelten dieselben Regeln zur Einführung der Junktoren. Deshalb sind diese Formeln auch Beispiele für wffs:

(Rxx v Fx) ~(Rxy → Gy) (Fx ∇ Gy)

~(Fx v (Gx → Hy)) (Fx ≡ ~Gx) ~(Fx v Rxy)

Syntax von PL: wohlgeformte Formeln II

3. Wenn α eine beliebige wff von PL ist und χ eine beliebige Individuenvariable, dann ist auch ⌜∀χ α⌝ eine wff von PL.

„Fx“	→	„∀x Fx“, „∀y Fx“, …
„Rxy“	→	„∀x Rxy“, „∀y Rxy“,…
„∀y Rxy“	→	„∀x∀y Rxy“, „∀y∀y Rxy“, …
„Fx ∧ Rxy“	→	„∀x (Fx ∧ Rxy)“, „∀y (Fx ∧ Rxy)“, …

SYNTAX VON PL – DER EXISTENZQUANTOR

Zusatzdefinition: ⌜$\exists\chi$⌝ kürzt ⌜$\sim\forall\chi\sim$⌝ ab. | $\mathrm{Def}_{\exists}$

→ „Es ist nicht der Fall, dass alle nicht“ bedeutet dasselbe wie „mindestens einer“.

Beispiel:

„Es ist nicht so, dass alle Frösche nicht grün sind“ bedeutet „Mindestens ein Frosch ist grün.“

Syntax von PL: Durchtauschen – Beweise

Sei χ irgendeine Individuenvariable. Dann gilt:

$\ulcorner \exists\chi \urcorner$ kürzt $\ulcorner {\sim}\forall\chi{\sim} \urcorner$ ab. | $\mathrm{Def}_{\exists}$

Mithilfe der Doppelten Negation und der Definition des Existenzquantors können wir Folgendes zeigen:

$\ulcorner {\sim}\forall\chi\ \alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner {\sim}\forall\chi{\sim}\ {\sim}\alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner \exists\chi{\sim}\ \alpha \urcorner$	| DN, Def ∃
$\ulcorner \forall\chi\ {\sim}\alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner {\sim}{\sim}\forall\chi{\sim}\ \alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner {\sim}\exists\chi\ \alpha \urcorner$	| DN, Def ∃
$\ulcorner \forall\chi\ \alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner {\sim}{\sim}\forall\chi{\sim}\ {\sim}\alpha \urcorner$	gdw	$\ulcorner {\sim}\exists\chi{\sim}\ \alpha \urcorner$	| DN (2x), Def ∃

Syntax von PL: Durchtauschen – Zusammenfassung

Wie wir gerade gezeigt haben, lässt sich der Allquantor immer als Existenzquantor ausdrücken und andersherum. Dadurch ergeben sich die folgenden Regeln:

Formal			Normalsprachlich		
$\ulcorner{\sim}\forall\chi{\sim}\urcorner$	$\leftrightarrow$	$\ulcorner\exists\chi\urcorner$	Nicht alles nicht	gdw	Mindestens eins
$\ulcorner{\sim}\forall\chi\urcorner$	$\leftrightarrow$	$\ulcorner\exists\chi{\sim}\urcorner$	Nicht alles	gdw	Mindestens eins nicht
$\ulcorner\forall\chi{\sim}\urcorner$	$\leftrightarrow$	$\ulcorner{\sim}\exists\chi\urcorner$	Alles nicht	gdw	Nicht mindestens eins
$\ulcorner\forall\chi\urcorner$	$\leftrightarrow$	$\ulcorner{\sim}\exists\chi{\sim}\urcorner$	alles	gdw	Nicht mindestens eins nicht

Syntax von PL: Durchtauschen – Beispiele

Regel: ⌜$\exists\chi$⌝ kürzt ⌜$\sim\forall\chi\sim$⌝ ab. | $\text{Def}_{\exists}$

Beispiele:

$\forall x\ Fx$	gdw	$\sim\exists x\sim Fx$
$\sim\exists y\ (Fy \rightarrow Gy)$	gdw	$\forall y\sim (Fy \rightarrow Gy)$
$\exists x\ (Fx \wedge Gy)$	gdw	$\sim\forall x\sim (Fx \wedge Gy)$
$\sim\forall z\ (Fz \vee Gz)$	gdw	$\exists z\sim (Fz \vee Gz)$

Formeln und Sätze - Konventionen

Konvention	Beispiel
Die äußersten Klammern von Formeln können weggelassen werden	„(Fx ∧ Gx) → Hx“ statt „((Fx ∧ Gx) → Hx)“
Die Hut bindet stärker als die anderen Junktoren → Klammern weglassen erlaubt	„Fx ∧ Gx → Hx“ statt „(Fx ∧ Gx) → Hx“
Bei der Übersetzung mehrerer Konditionale wechselt man zwischen „wenn …, dann“ und „falls …, dann“	„Fx → (Gx → Fx)“ übersetzen wir so: „*Wenn* x F ist, dann ist, *falls* x G ist, x F“
Falls auf einen Quantor ein weiterer derselben Sorte folgt, darf man auch nur die Variable, die er bindet, schreiben	„∀x∀y Rxy“ wird zu „∀xy Rxy“ „∃x∃y Rxy“ wird zu „∃xy Rxy“ Aber: „∀x∃y Rxy“ wird *nicht* zu „∀xy Rxy“

Seite 93, Nr. 1

Zeichenkette	Wohlgeformt?	Atomar?
Fx		
Fx		
Fx ∧ Gy → Fx		
∃x (Gx ∧ Fx)		
∃x (Gx ∧ Fz)		
∀x Fx		
Rxyz		
∀y (Fy → Gy)		
∀FG		
∀F Fx		
∀x (Fy → Gy)		
∃a		

Seite 93, Nr. 1

Zeichenkette	Wohlgeformt?	Atomar?
Fx	✓	✓
Fy	✓	✓
$Fx \land Gy \rightarrow Fx$	✓	✗
$\exists x\ (Gx \land Fx)$	✓	✗
$\exists x\ (Gx \land Fz)$	✓	✗
$\forall x\ Fx$	✓	✗
$Rxyz$	✓	✓
$\forall y\ (Fy \rightarrow Gy)$	✓	✗
$\forall FG$	✗	✗
$\forall F\ Fx$	✗	✗
$\forall x\ (Fy \rightarrow Gy)$	✓	✗
$\exists a$	✗	✗

Relationseigenschaften: Reflexivität

Eine Relation R ist reflexiv genau dann, wenn gilt: Wenn alle Leerstellen von R mit dem gleichen Namen gefüllt werden, ergibt sich immer ein wahrer Satz.

Eine Relation R ist reflexiv genau dann, wenn sie für jeden Gegenstand x im Redebereich den n-Tupel <x, x> enthält.

Beispiele:
_ ist gleich schwer wie _
_ sitzt in der selben Reihe wie _
_ ist so intelligent wie _

Formal: $\forall x\ Rxx$

Relationseigenschaften: Symmetrie

Eine Relation R ist symmetrisch genau dann, wenn gilt: Genau dann, wenn a in Relation zu b einen wahren Satz ergibt, ergibt b in Relation zu a auch einen wahren Satz.

Eine Relation R ist symmetrisch genau dann, wenn für jeden Tupel aus der Form <x, y> ein Tupel der Form <y, x> existiert, und andersherum.

Beispiele:
_ geht mit _ spazieren
_ ist verheiratet mit _
_ diskutiert mit _

Formal: $\forall xy\,(Rxy \rightarrow Ryx)$

Relationseigenschaften: Transitivität

Eine Relation R ist transitiv genau dann, wenn gilt: Wenn a in Relation zu b einen wahren Satz ergibt und b in Relation zu c, dann ergibt auch a in Relation zu c einen wahren Satz.

Eine Relation R ist transitiv genau dann, wenn, falls sie die Tupel <x, y> und <y, z> enthält, sie auch den Tupel <x, z> enthält.

Beispiele:
_ lebte vor _
_ ist kleiner als _
_ beinhaltet _

Formal: $\forall xyz\,(Rxy \land Ryz \rightarrow Rxz)$

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation nennen wir „Äquivalenzrelation“.

Vokabeln

- Singulärer Term, Prädikat, Extension, Relation
- Alphabet von PL
- Atomare Formel von PL, wohlgeformte Formel von PL
- Individuenvariable, Individuenkonstante
- Allquantor, Existenzquantor, Durchtauschen
- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation

Aufgaben (x-Dialekt im Übungsblatt!)

– Vertiefen: Durchtauschen
– Übungen:
  - 4. Auflage: S. 86, Nr. 2 + 3
  - 5. Auflage: S. 93, Nr. 2 + 3
– Lesen:
  - 4. Auflage: S. 86-92
  - 5. Auflage: S. 94-100

Bis nächste Woche!