Tutorium Logik

Der Kalkül des natürlichen Schließens

Agenda

- Axiomatik und Herleitungsspiele
- Natürliches Schließen
  - Elemente des Beweises
  - Regeln
  - Zusatzregeln
- Übersicht: Methoden der Aussagenlogik

Herleitungsspiele

Ein Herleitungsspiel (auch: der Kalkül)

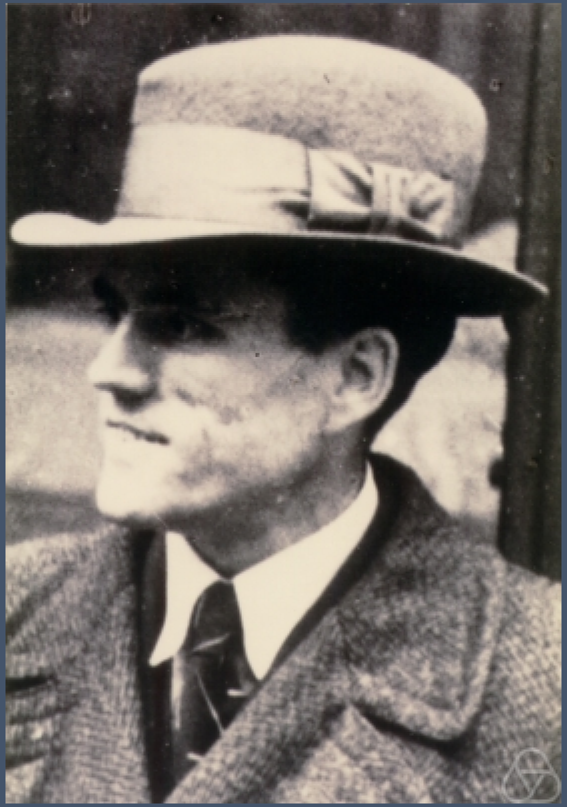
- Ist ein *syntaktisches* Verfahren zum Herleiten von Formeln $\rightarrow$ funktioniert ohne Semantik
- Hat idealerweise diese Eigenschaften:
  - Korrektheit: Alle herleitbaren Formeln sind allgemeingültig
  - Vollständigkeit: Alle allgemeingültigen Formeln sind herleitbar
- Gibt es in verschiedenen Formen
  - Axiomatiken: Axiome + Herleitungsregeln
  - Natürliches Schließen: Annahmen + Herleitungsregeln

Natürliches Schliessen

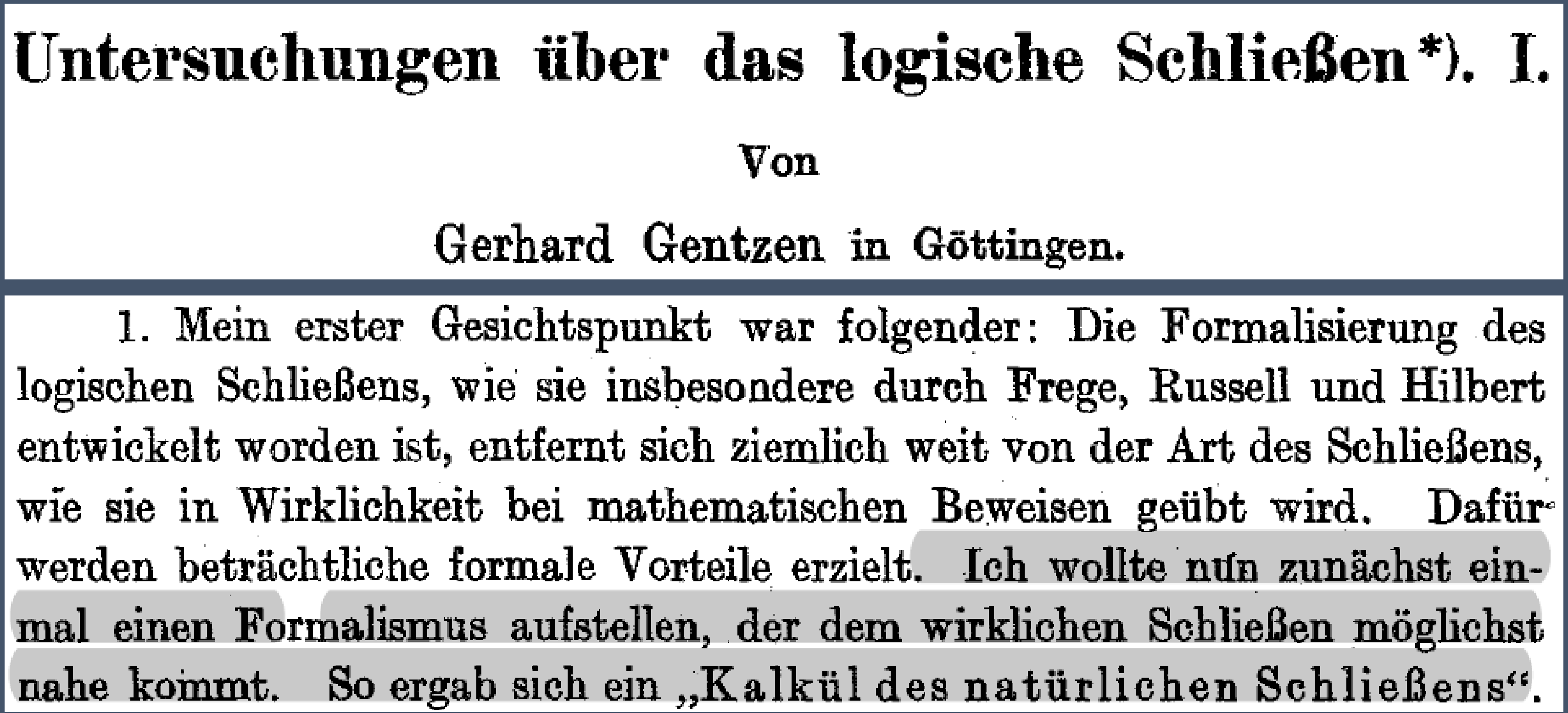
Das natürliche Schließen (K-AL)

- Ist ein Herleitungsspiel der Aussagenlogik
- Besitzt anstatt von Axiomen zwei Arten von Regeln
  - Einführungsregeln
    - Erlauben unter bestimmten Bedingungen, einen Junktor einzuführen
    - Werden mit „I“ für englisch „introduction“ abgekürzt
  - Eliminationsregeln
    - Erlauben unter bestimmten Bedingungen, einen Junktor zu löschen
    - Werden mit „E“ für englisch „elimination“ abgekürzt
- Ist sehr gut zur Argumentrekonstruktion geeignet
- Ist für AL (und PL) korrekt und vollständig

Der Usprung des natürlichen Schließens



Gerhard Gentzen
(1909-1945)



Untersuchungen über das logische Schließen*). I.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

1. Mein erster Gesichtspunkt war folgender: Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch Frege, Russell und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. Dafür werden beträchtliche formale Vorteile erzielt. Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein „Kalkül des natürlichen Schließens".

In zwei Teilen 1934/1935 veröffentlich (Dissertation)

Natürliches Schliessen - Elemente

Element	Funktion
Sternspalte	Gibt an, unter welchen Annahmen die Formel zustande kam
Zeilenspalte	Nummeriert die Herleitungsschritte
Formelspalte	Enthält genau eine wohlgeformte Formel
Bezugsspalte	Gibt an, mit welchen Zeilen man die Formel aus der Formelspalte gewonnen hat
Regelspalte	Gibt an, mit welchen Regeln man zur Formel gelangt ist

Natürliches Schliessen - Funktionsweise

<u>Die Funktionsweise von K-AL</u>

- Man nimmt *irgendwelche* wffs an → „Hypothesen"
- Man kennzeichnet diese wffs mit Sternen
- Man wendet die Herleitungsregeln solange an, bis man zur gewünschten Formel gelangt:
  - Die Formel ist gestirnt $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$ β ist herleitbar
  - Die Formel ist ungestirnt $\vdash_{AL} \beta$ β ist beweisbar

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind diejenigen Hypothesen, deren Sterne in der Sternspalte von β zu finden sind!

Natürliches Schliessen - Regeln

Hypothesen (Hyp)

- Sind irgendwelche wohlgeformten Formeln, die wir annehmen
- Sind damit (Ausnahme: Regel *AL*) die ersten Formeln, auf die wir die Herleitungsregeln anwenden
- Werden im Fließtext gekennzeichnet durch Phrasen wie:
  - „Nehmen wir an, dass …“
  - „Gegeben sei …“
  - „Gehen wir davon aus, dass …“
- Werden mit Sternen („*“) gekennzeichnet

!!! Wenn man eine wff unter der Annahme von Hypothesen gewinnt, trägt diese wff – bis auf zwei Ausnahmen - auch ihre Sterne !!!

Natürliches Schliessen - Regeln

Gesetz der doppelten Negation (DN)

zz: $\{\sim\sim p\} \vdash_{AL} p$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$\sim\sim p$	-	Hyp
*	2	p	1	DN

q. e. d.

Natürliches Schließen - Regeln

Einführung der Konjunktion (I∧)

zz: $\{p, q\} \vdash_{AL} p \wedge q$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	p	-	Hyp
*	2	q	-	Hyp
* *	3	$p \wedge q$	1,2	I∧

q. e. d.

Natürliches Schliessen - Regeln

Elimination der Konjunktion (E∧)

zz: $\{p \wedge q\} \vdash_{AL} q$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \wedge q$	-	Hyp
*	2	p	1	E∧
*	3	q	1	E∧

q. e. d.

Natürliches Schliessen - Regeln

Einführung der Alternation (Iv)

zz: $\{p\} \vdash_{AL} q \vee p$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	p	-	Hyp
*	2	$p \vee q$	1	Iv
*	3	$q \vee p$	1	Iv

q. e. d.

NATÜRLICHES SCHLIESSEN - REGELN

Elimination der Alternation (Ev)

zz: $\{p \lor q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow r\} \vdash_{AL} r$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \lor q$	-	Hyp
*	2	$p \rightarrow r$	-	Hyp
*	3	$q \rightarrow r$	-	Hyp
* * *	4	r	1, 2, 3	Ev

q. e. d.

Natürliches Schliessen - Regeln

Einführung des Konditionals (I→)

zz: $\vdash_{AL}$ p → (p v q)

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	p	-	Hyp
*	2	p v q	1	Iv
	3	p → (p v q)	1, 2	I→

Hier dürfen wir den Stern löschen, da wir die Annahme mit in die Formel genommen haben! (Ausnahme 1)

q. e. d.

Natürliches Schließen - Regeln

Elimination des Konditionals (E→)

zz: $\{p \rightarrow q, p\} \vdash_{AL} q$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \rightarrow q$	-	Hyp
*	2	p	-	Hyp
* *	3	q	1, 2	E→

q. e. d.

Natürliches Schliessen - Regeln

Elimination (E~) und Einführung der Negation (I~)

zz: $\vdash_{AL} \sim(p \wedge \sim p)$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \wedge \sim p$	-	Hyp
*	2	p	1	E∧
*	3	$\sim p$	1	E∧
*	4	$\perp$	2, 3	E~
	5	$\sim(p \wedge \sim p)$	1, 4	I~

Hier dürfen wir den Stern löschen, weil wir die widersprüchliche Annahme negiert haben! (Ausnahme 2)

q. e. d.

Natürliches Schließen - Regeln

Elimination der Negation (E~) und ex falso quodlibet (EFQ)

zz: $\{p \wedge \sim p\} \vdash_{AL} q$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \wedge \sim p$	-	Hyp
*	2	p	1	E∧
*	3	$\sim p$	1	E∧
*	4	$\perp$	2, 3	E~
*	5	q	4	EFQ

Natürliches Schliessen - Zusatzregeln

Einführung einer allgemeingültigen Formel (AL)

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
	1	$\sim(p \wedge \sim p)$	-	AL

Modus ponens mit allgemeingültiger Formel (AL + E→)

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
	1	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	-	AL
*	2	p	-	Hyp
*	3	$q \rightarrow p$	1, 2	AL + E→

Natürliches Schliessen – Zusatzregeln

Mehrfachkonditionalisierung ($I\rightarrow^{\pm}$)

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	p v q	-	Hyp
*	2	~p	-	Hyp
		…		
* *	11	q	1, 3, 7	Ev
	12	(p v q) ∧ ~p → q	1, 2, 11	$I\rightarrow^{+}$

→ Statt zwei mal I→ anzuwenden, um „((p v q) → ~p) → q" zu erhalten, können wir auch einfach ($I\rightarrow^{+}$) anwenden, um „ (p v q) ∧ ~p → q" zu erhalten. Diese Formeln sind nämlich nach dem Importations- und Exportationsgesetz (S. 43, [12]/[13]) äquivalent!

Natürliches Schließen – Zusatzregeln

Einführung der Definition eines Junktors (DEF)

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$\sim(p \wedge \sim q)$	-	Hyp
*	2	$p \rightarrow q$	1	DEF$\rightarrow$

Seite 67, Nr. 1

Leiten Sie mit K-AL die Transitivität des Konditionals her. Stützen Sie sich dabei auf den folgenden Gedankengang: Angenommen, wenn p, dann q; und angenommen, wenn q, dann r. Stellen wir uns nun vor, p sei der Fall. Dann folgt q, und daraus wiederum folgt r. Unter den gemachten Annahmen können wir also sagen, dass aus p r folgt. Also folgt aus den ersten zwei Annahmen, dass, wenn p der Fall ist, auch r der Fall ist. Falls also wenn p, dann q, und wenn q, dann r, dann auch wenn p, dann r.

Seite 67, Nr. 1

zz: $\vdash_{AL} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \rightarrow q$	-	Hyp
*	2	$q \rightarrow r$	-	Hyp
*	3	p	-	Hyp
* *	4	q	1, 3	$E\rightarrow$
* * *	5	r	2, 4	$E\rightarrow$
* *	6	$p \rightarrow r$	3, 5	$I\rightarrow$
	7	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	1, 2, 6	$I\rightarrow^{+}$

Vergleich: Methoden der Logik

	Farbtabelle	Tableaux	Natürliches Schließen
Ziel	Bei Formeln: Prüfen auf Allgemeingültigkeit Bei Schlüssen: Prüfen auf Kon-Sequenz	Bei Formeln: Prüfen auf Allgemeingültigkeit Bei Schlüssen: Prüfen auf Kon-Sequenz	Bei Formeln: Prüfen auf Beweisbarkeit Bei Schlüssen: Prüfen auf Herleitbarkeit
Beweisziel	Bei Formeln: $\vDash \alpha$ Bei Schlüssen: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$	Bei Formeln: $\vDash \alpha$ Bei Schlüssen: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$	Bei Formeln: $\vdash \alpha$ Bei Schlüssen: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$
Beweisweg	Beweis der Wahrheitswerte einer Formel für alle Modelle → direkter Beweis	Beweis der Widersprüchlichkeit der reductio-Annahme → indirekter Beweis	Beweis der syntaktischen Herleitbarkeit/Beweis-barkeit durch Anwendung der Herleitungsregeln

Vokabeln

- Axiome
- Natürliches Schließen
- Herleitbarkeit, Beweisbarkeit
- Vollständigkeit, Korrektheit
- Regeln zum natürlichen Schließen
- Vergleich der Methoden der Logik

Aufgaben

- Übungen:
  - 4. Auflage: S. 62, Nr. 2 [2]
  - 5. Auflage: S. 67, Nr. 2 [2]
- Lesen:
  - 4. Auflage: S. 74-86
  - 5. Auflage: S. 80-93
- Wiederholen: Farbtabellen, Tableaux

Bis nächste Woche!