Tutorium Logik

Wichtige Schlüsse und AL-Tableaux

Agenda

- Wichtige Schlüsse der Aussagenlogik
  - Hypothetische Syllogismen
  - Disjunktive Syllogismen
- Tableaux
  - Indirekter Beweis
  - Tableauregeln
- Übersetzen: Sherlock Holmes

Selbststudium: Farbtabellen und Tableaux

Link, um Farbtabellen selbst zu überprüfen: hier

Link, um Tableaux selbst zu überprüfen: hier

Der indirekte Beweis

Der indirekte Beweis

- Ist ein Verfahren, um zu beweisen, dass eine (meistens metasprachliche) Behauptung wahr ist
- Heißt „indirekt“, weil man die Behauptung über einen Umweg beweist:
  - Statt direkt zu beweisen, dass eine Aussage wahr ist, nimmt man – dem Argument willen – ihre Negation an → reductio-Annahme
  - Dann beweist man, dass sie zu Widersprüchen führt und damit falsch ist
  - Da in AL der Satz des ausgeschlossenen Dritten gilt, ist, wenn die Negation einer Formel (~ɑ) falsch ist, die Aussage selbst (ɑ) wahr
- Beispiel: Wenn ich beweise, dass die Aussage „Es ist nicht der Fall, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist“ falsch ist, beweise ich damit, dass die Aussage „$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl“ wahr ist

Die Tableau-Methode – Grundlagen

Die Tableau-Methode

- ist ein schematisches Verfahren, um Baumdiagramme zu erzeugen
- Wird benutzt, um indirekte Beweise zu führen
- Wird der Farbtabelle vorgezogen, weil ihre Komplexität nicht maßgeblich von der Anzahl der atomaren Formeln abhängt
- Wird in diesem Kurs benutzt, um semantische Beweise zu führen (Allgemeingültigkeit, Kon-Sequenz)
- Wird auch „Baumkalkül“ oder „Bethkalkül“ genannt

Die Tableau-Methode – Idee I

- Man kann jede Formel so umformen, dass entweder die Konjunktion oder die Alternation ihr Hauptjunktor ist
- Konjunktion und Alternation kann man graphisch darstellen:
  - Konjunktion → senkrechter Strich nach unten: „|“
  - Alternation → Fallunterscheidung (Strich nach links und rechts)
- Nun kann man eine Formel solange nach diesen Regeln umformen, bis nur noch atomare Formeln oder deren Negationen übrig sind

Die Tableau-Methode – Idee II

- Da man ausschließlich Äquivalenzen ausnutzt, geben die atomaren Formeln und deren Negationen die Wahrheitsbedingungen für die komplexe Formel, mit der man das Tableau begonnen hat, an
- Findet man aber für jeden Fall Widersprüche, so kann die Formel nicht wahr sein → sie ist widersprüchlich
- Nun gilt aber: ɑ ist widersprüchlich gdw ⌜~ɑ⌝ allgemeingültig ist

→ Weisen alle Äste eines Tableaus für ⌜~ɑ⌝ Widersprüche auf, so ist ⌜~~ɑ⌝ – und damit ɑ – allgemeingültig!

Tableaux: Regeln I

$$\begin{array}{c} \sim\sim\alpha \\ | \\ \alpha \end{array}$$

ɑ	~ɑ	⌜~~ɑ⌝	ɑ
1	0	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	0

⌜~~ɑ⌝ ist wahr genau dann, wenn ɑ wahr ist.

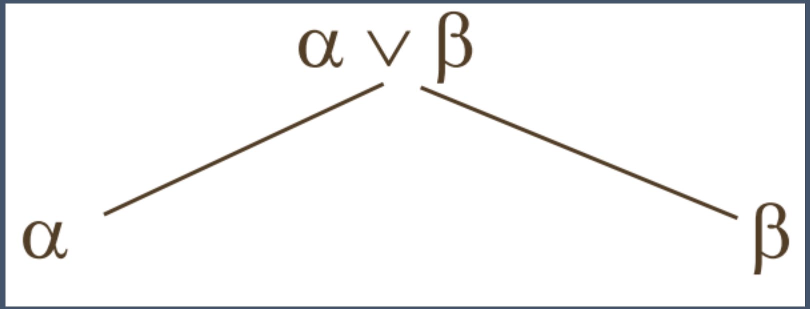
Tableaux: Regeln II

$$\begin{array}{c} \alpha \land \beta \\ | \\ \alpha \\ | \\ \beta \end{array}$$

α	β	⌜α ∧ β⌝
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

⌜α ∧ β⌝ ist wahr genau dann, wenn sowohl α als auch β wahr sind.

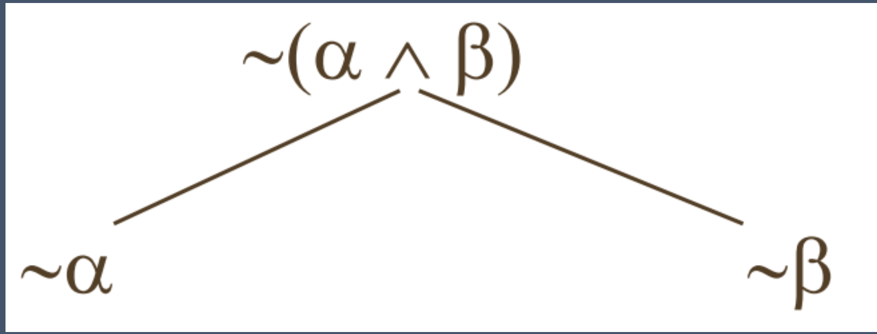
Tableaux: Regeln III



ɑ	β	⌜ɑ v β⌝
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

⌜ɑ v β⌝ ist wahr genau dann, wenn ɑ wahr ist oder β wahr ist oder sowohl ɑ als auch β wahr sind.

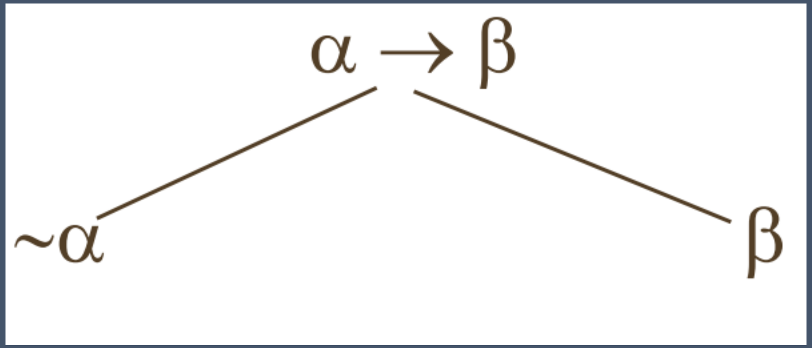
Tableaux: Regeln IV



α	β	⌜α ∧ β⌝	⌜~(α ∧ β)⌝	⌜~α v ~β⌝
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

⌜~(α ∧ β)⌝ ist wahr genau dann, wenn α falsch ist oder β falsch ist oder sowohl α als auch β falsch sind: ⌜~α v ~β⌝

Tableaux: Regeln V



α	β	$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$	$\ulcorner {\sim}\alpha \vee \beta \urcorner$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$ ist wahr genau dann, wenn α falsch ist oder β wahr ist.

Tableaux: Regeln VI

$\sim(\alpha \vee \beta)$

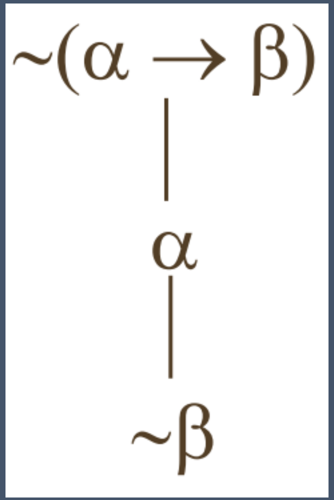
$\sim\alpha$

$\sim\beta$

α	β	⌜α v β⌝	⌜~(α v β)⌝	⌜~α ∧ ~β⌝
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

⌜~(α v β)⌝ ist wahr genau dann, wenn sowohl α als auch β falsch sind.

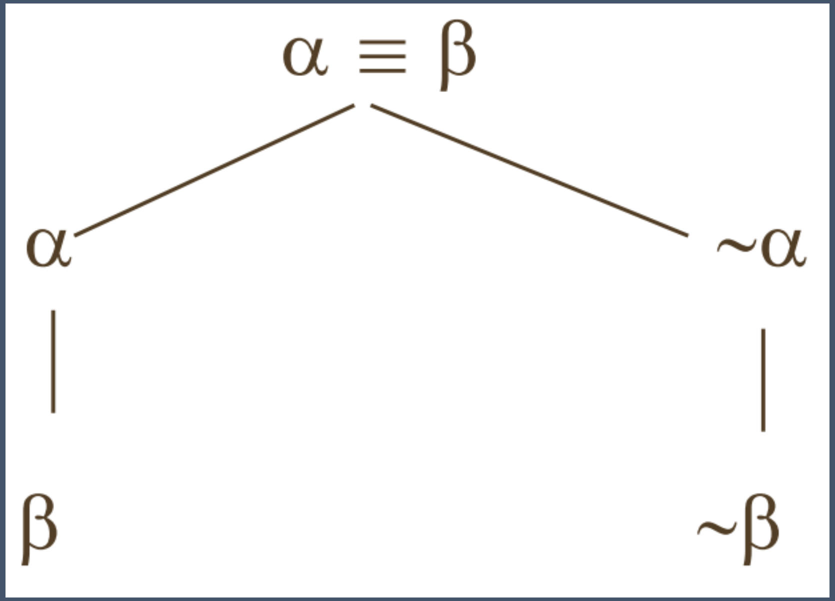
Tableaux: Regeln VII



α	β	$\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner$	$\ulcorner \sim(\alpha \to \beta) \urcorner$	$\ulcorner \alpha \land \sim\beta \urcorner$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

$\ulcorner \sim(\alpha \to \beta) \urcorner$ ist wahr genau dann, wenn α wahr ist, aber β falsch.

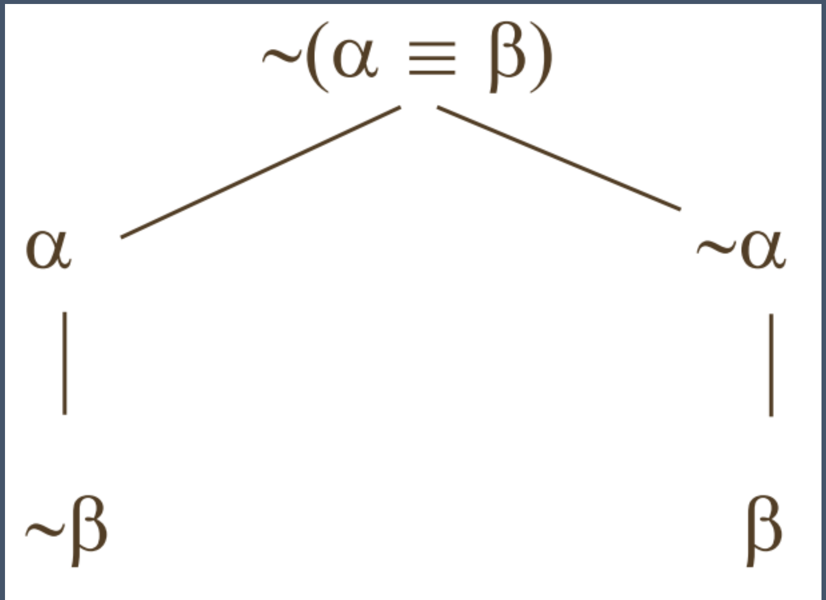
Tableaux: Regeln VIII



α	β	⌜α ≡ β⌝	⌜(α ∧ β) v (~α ∧ ~β)⌝
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

⌜α ≡ β⌝ ist wahr genau dann, wenn α und β beide wahr oder beide falsch sind.

Tableaux: Regeln IX



α	β	⌜α ≡ β⌝	⌜(α ∧ ~β) ∨ (~α ∧ β)⌝
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

⌜~(α ≡ β)⌝ ist wahr genau dann, wenn α wahr ist, aber β falsch, oder wenn α falsch ist, aber β wahr.

Die Tableau-Methode: Vorgehen

Die Tableau-Methode geht so vor:

- Aufschreiben, was man beweisen will (Metasprache!)
- Tableau anfangen:
  - Formeltableau: Negation der zu beweisenden Formel
  - Schlusstalbeau: Prämissen (ohne extra Negation) + Negation der Konklusion
- Hauptjunktoren suchen und die Tableau-Regeln darauf anwenden, bis nur noch atomare Formeln oder deren Negationen übrig sind
- Widersprüche an jedem Ast suchen
- Wenn an jedem Ast Widersprüche sind, gilt:
  - Schlusstableau: Der Schluss ist gültig
  - Formeltableau: Die Formel ist allgemeingültig

Formel- vs. Schlusstableaux

	Schlusstableau	Formeltableau
Beweisziel (gedeutet)	Gültigkeit eines Schlusses	Logische Wahrheit eines Satzes
Beweisziel (formal)	Kon-Sequenz zwischen Prämissen und Konklusion	Allgemeingültigkeit einer Formel
Beweisziel (symbolisch)	zz: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$	zz: $\vDash \alpha$
Reductio	Konklusion: $\sim\beta$	Ganze Formel: $\sim\alpha$

Die Tableau-Methode: Strategien

- Pflicht:
  - So kleinschrittig wie eben möglich vorgehen
  - Kreuze machen, sobald sich ein Widerspruch zwischen zwei Formeln ergibt
- Dringende Empfehlungen:
  - Erst diejenigen Formeln auflösen, für deren Auflösung man keine Fallunterscheidung benötigt
  - Negieren von Formeln, deren Hauptjunktor nicht „~“ ist:
    - die zu negierende Formel 1:1 abschreiben
    - Falls Außenklammern weggelassen wurden, wieder hinschreiben
    - Tilde vor die erste Klammer-Auf schreiben
  - Jede aufgelöste Formel abhaken (✓)

Übersetzen von AL: Schlüsse

Man übersetzt Schlüsse in AL, indem man

1) Alle Prämissen untereinander schreibt
2) Einen Schlussstrich zieht und darunter die Konklusion schreibt
3) die Strukturwörter durch Junktoren ersetzt
4) Ein Abkürzungsverzeichnis erstellt, indem man jeden *ganzen* normalsprachlichen Satz, mit einer atomaren Formel abkürzt (keine Personalpronomen!)
5) Für die Prämissen und die Konklusion die atomaren Formeln mit Junktoren zu einer wohlgeformten Formel zusammenfügt
6) Falls erforderlich, Gültigkeit überprüfen

Die Tableaumethode: Beispiel

Wenn Jerome getrunken hat, kommt er zu spät zur Arbeit.

Jerome kommt nicht zu spät zur Arbeit.

Jerome hat nicht getrunken.

Die Tableau-Methode: Beispiel

Wenn Jerome getrunken hat, kommt er zu spät zur Arbeit.

Jerome kommt nicht zu spät zur Arbeit.

Also hat Jerome nicht getrunken.

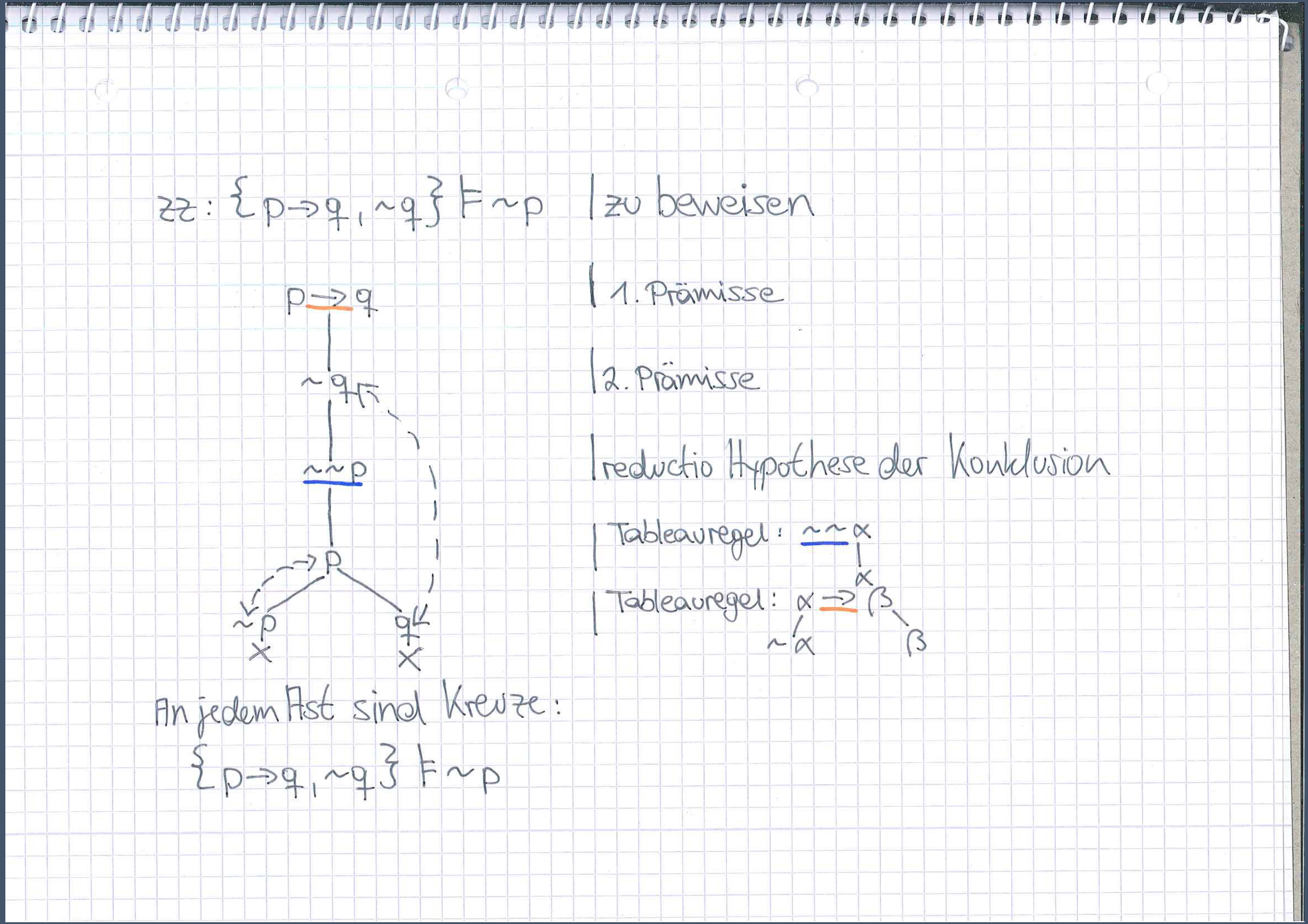
Die Tableau-Methode: Beispiel

Abkürzungsverzeichnis:
p: Jerome hat getrunken.
q: Jerome kommt zu spät zur Arbeit.

Wenn p, dann q.		$p \rightarrow q$
nicht q.		$\sim q$
———	$\longrightarrow$	———
nicht p.		$\sim p$

Hypothetischer modus tollendo tollens!

Beispiel: Schluss-Tableaux



Beispiel: Formeltableau

Tableau	
zz: $\models (p \to q) \wedge {\sim}q \to {\sim}p$	zu beweisen
${\sim}((p \to q) \wedge {\sim}q \to {\sim}p)$	reductio Hypothese
$(p \to q) \wedge {\sim}q$	Tableauregel: ${\sim}(\alpha \to \beta)$ / α / ${\sim}\beta$
${\sim}{\sim}p$	
p	Tableauregel: ${\sim}{\sim}\alpha$ / α
$p \to q$	Tableauregel: $\alpha \wedge \beta$ / α / β
${\sim}q$	
${\sim}p$ × q ×	Tableauregel: $\alpha \to \beta$ / ${\sim}\alpha$ β

An jedem Ast sind Kreuze: $\models (p \to q) \wedge {\sim}q \to {\sim}p$

Seite 57, Nr. 5

[1] $\sim p \rightarrow q$	[2] $\sim p \wedge \sim q$	[3] $\sim r$	[4] r	[5] $u \rightarrow (s \vee t)$
[6] $u \rightarrow (v \barwedge w)$	[7] $x \equiv w$	[8] y	[9] v	

Definitionen: „s“ kürzt „r*“ ab, „t“ kürzt „s*“ ab , … und „y“ kürzt „x*“ ab.

p: Mister X hat den Zug nach Cambridge genommen.

q: Mister X ist irgendwo im Eastend geblieben.

r: Es gibt Verbrecher, die am Tatort bleiben.

s: Mister X fühlt sich im Eastend sicher.

t: Mister X will Holmes und Watson ablenken.

u: Mister X ist im Eastend geblieben.

v: Mister X ist im Fiddler‘s Arms abgestiegen.

w: Mister X ist bei Lily.

x: Mister X trifft Joe bei Lily.

y: Mister X glaubt, dass Joe bei Lily ist.

Wichtige Schlüsse der Aussagenlogik I

Name	Begründung	Schlussform	Beispiel
Hypothetischer modus	Pfeil ist Hauptjunktor	$p \rightarrow q$	Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
ponendo	„p“ ist nicht verneint	p	Es regnet.
ponens	„q“ ist nicht verneint	q	Also ist die Straße nass.

Formel: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

Wichtige Schlüsse der Aussagenlogik II

Name	Begründung	Schlussform	Beispiel
Hypothetischer modus	Pfeil ist Hauptjunktor	$p \rightarrow q$	Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
tollendo	„q“ ist verneint	$\sim q$	Die Straße ist nicht nass.
tollens	„p“ ist verneint	$\sim p$	Also regnet es nicht.

Formel: $(p \rightarrow q) \land \sim q \rightarrow \sim p$

Wichtige Schlüsse der Aussagenlogik III

Name	Begründung	Schlussform	Beispiel
disjunktiver modus	Dreieck ist Hauptjunktor	$p \triangledown q$	Entweder regnet es, oder es schneit.
ponendo	„p“ ist nicht verneint	p	Es regnet.
tollens	„q“ ist verneint	$\sim q$	Also schneit es nicht.

Formel: $(p \triangledown q) \wedge p \rightarrow \sim q$

Wichtige Schlüsse der Aussagenlogik IV

Name	Begründung	Schlussform	Beispiel
disjunktiver modus	Dreieck ist Hauptjunktor	$p \triangledown q$	Entweder regnet es, oder es schneit.
tollendo	„p“ ist verneint	$\sim p$	Es regnet nicht.
ponens	„q“ ist nicht verneint	q	Also schneit es.

Formel: $(p \triangledown q) \land \sim p \rightarrow q$

Vokabeln

- hypothetische und disjunktive Syllogismen (Namen + Formen)
- Indirekter Beweis
- Tableaux (Regeln auswendig lernen!)

Aufgaben

- Übungen:
  - 4. Auflage: S. 38, [1], [5], [9], [11] mit Tableau beweisen
  - 5. Auflage: S. 40, Nr. 2, [1], [5], [9], [11]
- Lesen:
  - 4. Auflage: S. 53-62
  - 5. Auflage: S. 58-68 lesen

Bis nächste Woche!