# Tutorium Logik

## Deutung des Spiels AL

# Agenda

- Deutung des Spiels AL als Aussagenlogik
- Gesperrte Zonen von AL
- Übersetzen
- Wenn Zeit: Deduktionstheorem

# Deutung des Spiels AL

| Natürliche Sprache | Formale Sprache (AL) |
| --- | --- |
| Behauptungen | wohlgeformte Formeln |
| Strukturwörter | Junktoren |
| wahr, falsch | 1,0 |
| logisch wahr | allgemeingültig |
| gültiger Schluss | Kon-Sequenz |
| spezifische Situation | Modell |
| „also“ (bei Schlüssen) | „$\vDash$“ (bei Kon-Sequenzen) |

→ Die Farbtabelle ist ein Verfahren, um die Wahrheitswerte von komplexen Behauptungen zu ermitteln!

# GESPERRTE ZONEN VON AL

Gesperrte Zonen von AL

- Sind Bereiche, in denen AL nicht in der Lage ist, die Struktur der normalen Sprache adäquat darzustellen
- Können entweder gar nicht oder nur unzureichend übersetzt werden
- Sind beispielsweise

Ein Ausdruck ist assertorisch gdw er einen Wahrheitswert haben kann!

| | |
|---|---|
| - Nicht-assertorische Ausdrücke: | Fragen, Befehle, Ausrufe |
| - Quantitätsausdrücke: | alle/einige/keine |
| - Modalausdrücke: | Es ist notwendig/möglich, dass |
| - Deontische Ausdrücke: | Es ist verboten/geboten/erlaubt, dass |
| - Epistemische Ausdrücke: | wissen/glauben |

# Gesperrte Zonen von AL – Beispiel

Abkürzungsverzeichnis:

p: Alle Bären sind pelzig.
q: Ned ist ein Bär.
r: Ned ist pelzig.

| Schluss (normalsprachlich) | Schluss (formal) | Formel: |
|---|---|---|
| Alle Bären sind pelzig. | $p$ | $p \land q \rightarrow r$ |
| Ned ist ein Bär. | $q$ | |
| ______________________ | ____ | |
| Also: Ned ist pelzig. | $r$ | |

→ Der Schluss ist gültig, aber es besteht keine Kon-Sequenz in AL!

# Deutung der Junktoren: Tilde

Die Tilde („~“)

– Nennen wir ab jetzt „Negation“

– Deuten wir als „Es ist nicht der Fall, dass“ („nicht“)

| α | ⌜~α⌝ |
| --- | --- |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

# Deutung der Junktoren: Hut

Den Hut („∧“)

- Nennen wir ab jetzt „Konjunktion“ (Teile: „Konjunkte“)
- Deuten wir als (kommutatives) „und“
- Deuten wir als „weder … noch“ gdw beide Konjunkte negiert sind (gdw ⌜$\sim\alpha \wedge \sim\beta$⌝)

| $\alpha$ | $\beta$ | ⌜$\alpha \wedge \beta$⌝ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

# Deutung der Junktoren: Pfeil

Den Pfeil („→“)

- Nennen wir ab jetzt „(materiales) Konditional“ (Teile: Antezedens, Konsequens)
- Deuten wir – mit Mühe und Not – als „wenn, dann“
- Nennen wir „Implikation“ gdw er der Hauptjunktor einer allgemeingültigen Formel ist

| α | β | ⌜α → β⌝ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

# Deutung der Junktoren: Eistüte

Die Eistüte („v“)

– Nennen wir ab jetzt „Alternation“ (Teile: „Alternate“)
– Deuten wir als „und/oder“ (inklusiv)

| α | β | ⌜α v β⌝ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

# Deutung der Junktoren: Dreieck

Das Dreieck („∇“)

- Nennen wir ab jetzt „Disjunktion“ (Teile: „Disjunkte“)
- Deuten wir als „entweder … oder“ (exklusiv)

| α | β | ⌜α ∇ β⌝ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

# Deutung der Junktoren: Spaghetti

<u>Die Spaghetti („≡“)</u>

– Nennen wir ab jetzt „Bikonditional“ (Konditional in beide Richtungen)

– Deuten wir als „genau dann, wenn“ oder „nur dann, wenn“

– Nennen wir „Äquivalenz“ gdw sie der Hauptjunktor einer allgemeingültigen Formel ist

| α | β | ⌜α ≡ β⌝ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

# Junktoren: Übersicht

| Name | Zeichen | Strukturwort |
| --- | --- | --- |
| Negation | ~ | Nicht/kein/es ist nicht der Fall, dass |
| Konjunktion | $\wedge$ | Und/obwohl/aber |
| Alternation | $\vee$ | (Und/)oder |
| Disjunktion | $\nabla$ | Entweder …, oder |
| Konditional | $\rightarrow$ | Wenn …, dann |
| Bikonditional | $\equiv$ | Genau/nur dann, wenn |

# Übersetzen von AL: Sätze

Man übersetzt Sätze in AL-Formeln, indem man

1) die Strukturwörter durch Junktoren ersetzt
2) Ein Abkürzungsverzeichnis erstellt, indem man jeden *ganzen* normalsprachlichen Satz, der kein Strukturwort enthält, mit einer atomaren Formel abkürzt (keine Personalpronomen!)
3) Die atomaren Formeln mit Junktoren zu *<u>einer</u>* wohlgeformten Formel zusammenfügt

Will man prüfen, ob der Satz logisch wahr ist, überprüft man die übersetzte Formel mithilfe der Farbtabelle auf Allgemeingültigkeit!

# Formeln und Sätze - Konventionen

| Konvention | Beispiel |
|---|---|
| Die äußersten Klammern von Formeln können weggelassen werden | „$(p \land q) \rightarrow p$“ statt „$((p \land q) \rightarrow p)$“ |
| Die Hut bindet stärker als die anderen Junktoren → Klammern weglassen erlaubt | „$p \land q \rightarrow p$“ statt „$(p \land q) \rightarrow p$“ |
| Bei der Übersetzung mehrerer Konditionale wechselt man zwischen „wenn …, dann“ und „falls …, dann“ | „$p \rightarrow (q \rightarrow p)$“ übersetzen wir so: „Wenn p der Fall ist, dann ist, *falls* q der Fall ist, p der Fall“ |

# Formeln vs. Schlüsse

| Schlüsse | Formeln |
|---|---|
| *bestehen i. d. R. aus* mehreren wffs | *sind* wffs |
| Haben keine Wahrheitswerte | Haben Wahrheitswerte |
| Können eine Kon-Sequenz zwischen Präm- und Konk-Formeln bilden | Können allgemeingültig, widersprüchlich oder erfüllbar sein |
| Können immer als Formeln dargestellt werden → Deduktionstheorem | Können nur dann als Schluss dargestellt werden, wenn ihr Hauptjunktor „→" ist |
| Geben die Struktur *eines Arguments – i. d. R. bestehend aus mehreren Aussagesätzen –* wieder | Geben die Struktur *eines einzelnen Aussagesatzes* wieder |

# Übersetzen von AL: Sätze - Beispiel

Wenn Bernd Hunger hat, (dann) wird er zur Diva, aber er hat keinen Hunger.

Abkürzungsverzeichnis:
p: Bernd hat Hunger.
q: Bernd wird zur Diva.

$(p \rightarrow q) \wedge \sim p$

# Übersetzen von AL: Sätze - Beispiel

| p | q | (p→q) | ~p | (p→q) ∧ ~p |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

→ Die Behauptung „Wenn Bernd Hunger hat, (dann) wird er zur Diva, aber er hat keinen Hunger“ wird wahr genau dann, wenn Bernd keinen Hunger hat! Sie ist erfüllbar.

# Übersetzungen von Negationen

Abkürzungsverzeichnis:

p: Es regnet.

q: Die Sonne scheint.

| | |
|---|---|
| $\sim p \land \sim q$ | Weder regnet es, noch scheint die Sonne. |
| $\sim p \land q$ | Es regnet nicht, aber/und die Sonne scheint. |
| $p \land \sim q$ | Es regnet, aber/und die Sonne scheint nicht. |
| $\sim(p \land q)$ | Es ist nicht der Fall, dass es regnet und die Sonne scheint. |
| $\sim(\sim p \land q)$ | Es ist nicht der Fall, dass es nicht regnet und die Sonne scheint. |

# Übersetzen von AL: Schlüsse

Man übersetzt Schlüsse in AL, indem man

1) Alle Prämissen untereinander schreibt
2) Einen Schlussstrich zieht und darunter die Konklusion schreibt
3) die Strukturwörter durch Junktoren ersetzt
4) Ein Abkürzungsverzeichnis erstellt, indem man jeden *ganzen* normalsprachlichen Satz, mit einer atomaren Formel abkürzt (keine Personalpronomen!)
5) Für die Prämissen und die Konklusion die atomaren Formeln mit Junktoren zu einer wohlgeformten Formel zusammenfügt

Will man prüfen, ob der Schluss gültig ist, überprüft man mithilfe der Farbtabelle, ob die Prämissen und die Konklusion – in Formeln übersetzt – eine Kon-Sequenz bilden!

# Übersetzen von AL: Schlüsse - Beispiel

Prämisse 1: Das Verbot von Cannabis ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Vorteil-Nachteil-Rechnung beim Verbot positiver ausfällt als bei der Legalisierung.

Prämisse 2: Die Vorteil-Nachteil-Rechnung fällt beim Verbot von Cannabis nicht positiver aus als bei der Legalisierung.

---

Konklusion: Also ist das Verbot von Cannabis nicht gerechtfertigt.

# Übersetzen von AL: Schlüsse - Beispiel

Prämisse 1: Das Verbot von Cannabis ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Vorteil-Nachteil-Rechnung beim Verbot positiver ausfällt als bei der Legalisierung.

Prämisse 2: Die Vorteil-Nachteil-Rechnung fällt beim Verbot von Cannabis nicht positiver aus als bei der Legalisierung.

---

Konklusion: Also ist das Verbot von Cannabis nicht gerechtfertigt.

# AL-Übersetzen: Beispiel II

Abkürzungsverzeichnis:

p: Das Verbot von Cannabis ist gerechtfertigt.

q: Die Vorteil-Nachteil-Rechnung beim Verbot fällt positiver aus als bei der Legalisierung.

Prämisse 1: $p \equiv q$

Prämisse 2: $\sim q$

---

Konklusion: $\sim p$

# AL-Übersetzen: Beispiel (Schluss)

| p | q | p ≡ q | ~q | ~p |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Für kein Modell gilt: Alle Prämissen sind wahr, aber die Konklusion ist falsch.
Deshalb besteht eine Kon-Sequenz: $\{p \equiv q, \sim q\} \vDash_{AL} \sim p$

# AL-Übersetzen: Beispiel (Satz)

| $p$ | $q$ | $p \equiv q$ | $\sim q$ | $\sim p$ | $(p \equiv q) \wedge \sim q$ | $(p \equiv q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Für jedes Modell wird die Formel schwarz, also wahr. Deshalb ist die Formel allgemeingültig: $\vDash_{AL} (p \equiv q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

# AL-Übersetzen: S. 50, Nr. 1 – Professor X

Prämisse 1: Wenn es Professor X gelingt, sein Forschungsprojekt über Drittmittel zu finanzieren, ist Professor X tüchtig.

Prämisse 2: Professor X gelingt es nicht, sein Forschungsprojekt über Drittmittel zu finanzieren.

---

Konklusion: Also ist Professor X nicht tüchtig.

# AL-Übersetzen: S. 50, Nr. 1 – Professor X

Prämisse 1: Wenn es Professor X gelingt, sein Forschungsprojekt über Drittmittel zu finanzieren, (dann) ist Professor X tüchtig.

Prämisse 2: Professor X gelingt es nicht, sein Forschungsprojekt über Drittmittel zu finanzieren.

---

Konklusion: Also ist Professor X nicht tüchtig.

# AL-Übersetzen: S. 50, Nr. 1 – Professor X

Prämisse 1: $p \rightarrow q$

Prämisse 2: $\sim p$

---

Konklusion: $\sim q$.

Abkürzungsverzeichnis:

p: Professor X gelingt es, sein Forschungsprojekt über Drittmittel zu finanzieren.

q: Professor X ist tüchtig.

Selbe Struktur wie Bond-Schluss: falscher modus tollens!

# AL-Übersetzen: S. 50, Nr. 1 – Professor X

| p | q | p → q | ~p | ~q |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Für den Modelltyp aus Zeile 4 gilt: Alle Prämissen sind wahr, aber die Konklusion ist falsch. Deshalb besteht keine Kon-Sequenz: $\{p \rightarrow q, \sim p\} \nvDash_{AL} \sim q$

# AL-Übersetzen: Der stoische Hund (zwei Wege)

Abkürzungsverzeichnis:

p: Das verfolgte Tier hat den ersten Weg genommen.

q: Das verfolgte Tier hat den zweiten Weg genommen.

Prämisse 1: p ∇ q

Prämisse 2: ~p

Hier handelt es sich um einen disjunktiven modus tollendo ponens!

---

Konklusion: q

# AL-Übersetzen: S. 40, Nr. 2 (Übersetzen)

Aufgabe: Übersetzt die untenstehenden Formeln.

| | Formel |
| --- | --- |
| [1] | $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ |
| [4] | $\sim(p \wedge \sim p)$ |
| [7] | $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ |

# AL-Übersetzen: S. 40, Nr. 2 (Übersetzen)

| | Formel | Übersetzung | Name |
|---|---|---|---|
| [1] | $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ | Falls, wenn p der Fall ist, auch q der Fall ist, dann ist, wenn q nicht der Fall ist, auch p nicht der Fall. | Kontraposition |
| [4] | $\sim(p \wedge \sim p)$ | Es ist nicht der Fall, dass p der Fall ist und p nicht der Fall ist. | Nichtwider-spruchssatz (NWS) |
| [7] | $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | Falls, wenn p der Fall ist, auch q der Fall ist, und wenn q der Fall ist, auch r der Fall ist, dann ist, wenn p der Fall ist, auch r der Fall. | Transitivität des Konditionals |

# AL-Übersetzen: S. 43 (Übungen)

| | Formel | Übersetzung | Name |
|---|---|---|---|
| [1] | ~(p ∧ q) ≡ (~p v ~q) | Genau dann, wenn es nicht der Fall ist, dass p und q der Fall sind, ist p nicht der Fall oder q nicht der Fall. | De Morgan I |
| [2] | ~(p v q) ≡ (~p ∧ ~q) | Genau dann, wenn es ist nicht der Fall ist, dass p oder q der Fall sind, sind weder p noch q nicht der Fall. | De Morgan II |
| [7] | p → (p v q) | Wenn p der Fall ist, dann ist (auch) p oder q der Fall. | Hinzufügungs-regel |

# AL-Übersetzen: S. 56, Nr. 1 (Übersetzen)

| Formel | Übersetzung | Name |
|---|---|---|
| [2] $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | Falls, wenn p der Fall ist, auch q der Fall ist, und wenn q der Fall ist, auch r der Fall ist, dann ist, wenn p der Fall ist, auch r der Fall. | Transitivität des Konditionals |
| [3] $(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ | Genau dann, wenn falls p der Fall ist, auch q der Fall ist, ist es nicht der Fall, dass zwar p der Fall ist, q aber nicht. | Äquivalenz zur Definition des Konditionals |
| [4] $(p \Delta q) \wedge \sim q \rightarrow p$ | Wenn entweder p oder q der Fall ist und q nicht, dann ist p der Fall. | modus tollendo ponens |

# DAS DEDUKTIONSTHEOREM VON AL

Deduktionstheorem: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash_{AL} \beta$ gdw $\vDash_{AL} (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$

Genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass die Präm-Formeln alle wahr sind, aber die Konk-Formel falsch ist, macht kein Modell die dazugehörige Formel, die man erhält, wenn man die Präm-Formeln mit dem Hut verbindet, danach einen Pfeil und die Konk-Formel schreibt, falsch.

→ Jede Kon-Sequenz ist in Formelschreibweise allgemeingültig!

→ Jede allgemeingültige Formel, deren Hauptjunktor das Konditional ist, bildet in Schlussform eine Kon-Sequenz zwischen Prämissen und Konklusion!

– Beispiele:

| Kon-Sequenz | | | | Formel |
|---|---|---|---|---|
| $\{p \equiv q, \sim q\}$ | $\vDash_{AL}$ | $\sim p$ | gdw | $\vDash_{AL} (p \equiv q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ |
| $\{(p \rightarrow q), p\}$ | $\vDash_{AL}$ | $q$ | gdw | $\vDash_{AL} ((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q)$ |

# Vokabeln

- Die Deutung von AL
  - Junktoren: Namen und Deutungen
  - Die Farbfunktion als Wahrheitswertfunktion
  - Atomare Formeln als Sätze
  - Junktoren als Strukturwörter
  - Allgemeingültigkeit als logische Wahrheit
  - Kon-Sequenz als Gültigkeit
- Übersetzen: Formeln und Schlüsse
- Deduktionstheorem
- Grenzen von AL

# Aufgaben

- Übungen:
  - Rest der Aufgaben von den Folien
  - 4. Auflage: S. 52, Nr. 1 (Rest)
  - 5. Auflage: S. 56, Nr. 1 (Rest)
- Lesen:
  - 4. Auflage: S. 36-40
  - 5. Auflage: S. 38-43

# Bis nächste Woche!