Tutorium Logik

AL-Semantik

Agenda

- Mengenlehre
  - Mengen
  - n-Tupel
  - Funktionen
- AL-Semantik
  - Definition
  - Farbtabellen
  - Kon-Sequenzen
  - Deduktionstheorem

QISPOS-Anmeldephase

Die QISPOS-Anmeldephase hat am 24.10.2022 begonnen und endet am 20.12.2022.

Falls ihr euch angemeldet habt und doch abmelden wollt, könnt ihr das bis zum 10.01.2023 tun.

Seite 33, Nr. 3

Was ist in den folgenden Formeln jeweils der Hauptjunktor?

[1] $(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$

[2] $(\sim p \wedge q)$

[3] $\sim(p \wedge q)$

SEITE 33, NR. 3

Was ist in den folgenden Formeln jeweils der Hauptjunktor?

[1] $(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$

[2] $(\sim p \wedge q)$

[3] $\sim(p \wedge q)$

MENGEN

Eine Menge (engl. „set“)

- Macht sich bemerkbar durch geschweifte Klammern: {…}
- Fasst Dinge (genannt: „Elemente“) zu Einem zusammen
- Die Reihenfolge der Elemente ist egal: $\{a,b,c\} = \{c,b,a\}$
- Kann auf zwei Weisen definiert werden:
  - Man gibt alle ihre Elemente an → $M = \{Jule, Eva\}$
  - Man definiert eine Bedingung → $N = \{x \mid x > 1\}$

Jule $\in$ M,
Tom $\notin$ M

lies: „N ist die Menge derjenigen Gegenstände mit der Eigenschaft, größer als 1 zu sein“

n-Tupel

Ein n-Tupel

- Macht sich bemerkbar durch spitze Klammern: $\langle \ldots \rangle$
- Ist eine besondere Menge, bei der die Anordnung der Elemente wichtig ist: $\langle 1,2 \rangle \neq \langle 2,1 \rangle$!
- Beispiele:
  - $\langle$Vitus, 20 Jahre$\rangle$ → Zweiertupel
  - $\langle a,b,c,d \rangle$ → Vierertupel (Quadrupel)

→ Die Gegenstände, die zwischen den spitzen Klammern steht, nennen wir „Komponenten“!

Funktionen

Argument Wert

Eine Funktion

- Ist eine Menge aus Zweiertupeln
- Beispiel: f = {⟨Vitus, 20 Jahre⟩, ⟨Marina, 25 Jahre⟩, ⟨Bernd, 19 Jahre⟩}
- Hat einen Argumentbereich (D)
  - Die Menge der ersten Komponenten der Tupel
  - Beispiel: D = {Vitus, Marina, Bernd}
- Hat einen Wertebereich (W)
  - Die Menge der zweiten Komponenten der Tupel
  - Beispiel: W = {20 Jahre, 25 Jahre, 29 Jahre}

Notwendige Eigenschaften von Funktionen

<u>Eine Menge M ist eine Funktion gdw</u>

Linkstotalität

– Alle Elemente von M Tupel sind
– Jedem Argument mindestens ein Wert zugewiesen wird
– Jedem Argument höchstens ein Wert zugewiesen wird

Rechtseindeutigkeit

$\rightarrow$ Eine n-stellige Funktion ist eine Menge aus $n+1$ Tupeln, deren ersten n Komponenten ihre Argumente sind und deren $n+1$te Komponente ihr Wert ist.

Funktionen: (Keine) Beispiele

Alter = {⟨Vitus, 20 Jahre⟩, ⟨Vitus, 25 Jahre⟩}	Keine Funktion, da nicht rechtseindeutig
$f(x) = x^2$ = {⟨1,1⟩, ⟨2,4⟩, ⟨3,9⟩, …}	Funktion, da linkstotal und rechtseindeutig
Geschlecht = {⟨Vitus, männlich⟩, ⟨Tina, weiblich⟩, ⟨Venus, ⟩}	Keine Funktion, da nicht linkstotal
Studienfächer = {⟨Vitus, ⟨Philo, KoWi⟩⟩, ⟨Tobi, ⟨Philo, Physik⟩⟩}	Funktion, da linkstotal und rechtseindeutig

AL-SEMANTIK

Genannt „Interpretationsfunktion"

Ein AL-Modell ist eine Funktion V, die jeder wff von AL genau ein Element aus {1, 0} zuordnet, wobei die folgenden einschränkenden Bedingungen gelten:

1. V(⌜~α⌝) = 1 gdw V(α) = 0. (Farbvertauscher)
2. V(⌜(α ∧ β)⌝) = 1 gdw sowohl V(α) = 1 als auch V(β) = 1.

D (V) = {x | x ist eine wff von AL}

W (V) = {1, 0}

AL-Semantik – mehr Junktoren

Aus den Junktordefinitionen zusammen mit der Definition zur AL-Semantik ergeben sich folgende Regeln:

3. $V(\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner) = 1$ gdw *mindestens einer* der folgenden Fälle – womöglich aber auch beide – vorliegt:
   a) $V(\alpha) = 1$
   b) $V(\beta) = 1$
4. $V(\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)\urcorner) = 0$ gdw $V(\alpha) = 1$ und $V(\beta) = 0$.
5. $V(\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner) = 1$ gdw $V(\alpha) \neq V(\beta)$ (Farbunterscheider)
6. $V(\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner) = 1$ $V(\alpha) = V(\beta)$ (Farbvergleicher)

AL-Semantik: Folgen der Definitionen

Vgl. Linkstotalität!

<u>B-Prinzip für wffs</u>: Es kann nicht vorkommen, dass eine wff von AL in Bezug auf ein AL-Modell einfach zahllos bleibt. Jede wff bekommt eine Zahl zugewiesen: wenn nicht 1, dann 0, und umgekehrt.

Vgl. Rechtseindeutigkeit!

<u>K-Prinzip für wffs</u>: Es kann nicht vorkommen, dass einer wff von AL in Bezug auf ein AL-Modell mehr als eine Zahl zugewiesen bekommt. Keine wff kann in Bezug auf eine AL-Interpretation sowohl 1 als auch 0 sein.

→ Jede wff bekommt in einem Modell *genau eine* Zahl – entweder 1 oder 0 – zugeordnet.

Seite 35, Nr. 4

Die Menge enthält Tupel für jede wff!

Sei V = {⟨p, 1⟩, ⟨q, 0⟩, ⟨r, 0⟩, ⟨s, 1⟩, …}.

Welche Zahl haben die folgenden wffs von AL in Bezug auf V?

s	$(p \vee {\sim}q)$	$({\sim}(r \vee s) \wedge (p \wedge {\sim}p))$	${\sim}{\sim}{\sim}{\sim}p$
${\sim}r$	$(r \rightarrow s)$	${\sim}((r \vee s) \wedge (p \wedge {\sim}p))$	
${\sim}(q \wedge {\sim}r)$	$((r \equiv r) \rightarrow q)$	$((p \rightarrow r) \rightarrow s)$	

Seite 35, Nr. 4: Lösungen I

Sei $V = \{\langle p, 1\rangle, \langle q, 0\rangle, \langle r, 0\rangle, \langle s, 1\rangle, \ldots\}$.

Welche Zahl haben die folgenden wffs von AL in Bezug auf V?

$V(s) = 1$

$V({\sim}r) = 1$

$V({\sim}(q \wedge {\sim}r)) = 1$

$V(p \vee {\sim}q) = 1$

$V(r \rightarrow s) = 1$

$V((r \equiv r) \rightarrow q) = 0$

Seite 35, Nr. 4: Lösungen II

Sei V = {⟨p, 1⟩, ⟨q, 0⟩, ⟨r, 0⟩, ⟨s, 1⟩, …}.

Welche Zahl haben die folgenden wffs von AL in Bezug auf V?

$V(\sim(r \lor s) \land (p \land \sim p)) = 0$

$V(\sim\sim\sim\sim q) = 0$

$V(\sim((r \lor s) \land (p \land \sim p))) = 1$

$V((p \rightarrow r) \rightarrow s) = 1$

Definition AL-Theorie 1

Sei α eine wohlgeformte Formel (wff) von AL. Dann gilt:

1. α ist (AL-)allgemeingültig genau dann, wenn α für jedes AL-Modell 1 ist. (geschrieben: $\vDash_{AL}$ α)
2. α ist (AL-)widersprüchlich genau dann, wenn α für jedes AL-Modell 0 ist.
3. α ist (AL-)erfüllbar genau dann, wenn α für mindestens ein AL-Modell 1 ist.

→ Das Zeichen „⊨“ nennen wir „double turnstile“. Es ist ein metasprachliches Zeichen und schluckt Anführungszeichen.

AL-Semantik: Farbtabellen (Formeln)

Farbtabellen

– Sind ein Verfahren, um herauszufinden, ob eine wff allgemeingültig, widersprüchlich oder erfüllbar ist

– Funktionieren nach diesem Muster:

1. Die zu prüfende wff in die äußerste rechte Spalte schreiben.
2. Die wff anhand des Hauptjunktors in ihre Bestandteile aufteilen in die Spalten links von dieser schreiben.
3. Alle Zahlkombinationen der atomaren Formeln aufschreiben.
4. Die Tabelle nach den Semantikregeln ausfüllen.
5. In der letzte Spalte ablesen, ob die wff allgemeingültig, widersprüchlich oder erfüllbar ist.

Farbtabellen (Formeln) – Beispiel

Modell<u>typen</u>, da hier nur relevante atomare Formeln Zahlen haben

	p	q	p ∧ q	~p	~(p ∧ q)	~(p ∧ q) → ~p
V_1= {⟨p, 1⟩, ⟨q, 1⟩, …}	1	1	1	0	0	1
V_2= {⟨p, 1⟩, ⟨q, 0⟩, …}	1	0	0	0	1	0
V_3= {⟨p, 0⟩, ⟨q, 1⟩, …}	0	1	0	1	1	1
V_4= {⟨p, 0⟩, ⟨q, 0⟩, …}	0	0	0	1	1	1

„~(p ∧ q) → ~p" wird für drei relevante Modelltypen 1. Das heißt, die Formel ist erfüllbar und damit nicht widersprüchlich. Sie wird aber für einen Modelltyp 0. Sie ist also nicht (AL-)allgemeingültig: $\not\models_{AL}$ ~(p ∧ q) → ~p

Farbtabellen (Formeln) – Beispiel

	p	q	p	~q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)	p → q
V_1= {⟨p, 1⟩, ⟨q, 1⟩, …}	1	1	1	0	0	1	1
V_2= {⟨p, 1⟩, ⟨q, 0⟩, …}	1	0	1	1	1	0	0
V_3= {⟨p, 0⟩, ⟨q, 1⟩, …}	0	1	0	0	0	1	1
V_4= {⟨p, 0⟩, ⟨q, 0⟩, …}	0	0	0	1	0	1	1

„p → q" wird für drei relevante Modelltypen 1. Das heißt, die Formel ist erfüllbar. Sie wird aber für einen Modelltyp 0. Sie ist also nicht (AL-)allgemeingültig:

$\nvDash_{AL}$ p → q

KON-SEQUENZEN

Eine Kon-Sequenz von AL

- Besteht aus
  - Einer (möglicherweise leeren) Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, deren Elemente nur wffs von AL sind (den Präm-Formeln)
  - Genau einer wff β von AL (der Konk-Formel)
- Erfüllt die Bedingung, dass es kein AL-Modell gibt, in dem jede Präm-Formel 1 ist, aber die Konk-Formel 0
- Schreibt man so: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash_{AL} \beta$
- Konvention: $\vDash_{AL} \alpha$ kürzt $\{\} \vDash_{AL} \alpha$ ab

Farbtabellen für Kon-Sequenzen

Farbtabellen für Kon-Sequenzen

- Sind ein Verfahren, um herauszufinden, ob eine Menge an Präm-Formeln eine Kon-Sequenz mit einer Konk-Formel bildet
- Funktionieren nach diesem Muster:
  1. Die Konk-Formel in die äußerste rechte Spalte schreiben.
  2. Die Präm-Formeln in die Spalten links von der Konk-Formel schreiben.
  3. Die Präm-Formeln anhand des Hauptjunktors in ihre Bestandteile aufteilen und sie in die Spalten links von dieser schreiben.
  4. Alle Farbkombinationen der atomaren Formeln aufschreiben.
  5. Die Tabelle nach den Semantikregeln ausfüllen.
  6. Ablesen, ob es ein Modell gibt, in dem alle Präm-Formeln 1, alle Konkformeln aber 0 sind.

FARBTABELLEN (KON-SEQUENZEN) - BEISPIEL

Modelltypen, da hier nur relevante atomare Formeln Zahlen haben

	p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p
$V_1 = \{\langle p, 1\rangle, \langle q, 1\rangle, \ldots\}$	1	1	1	0	0
$V_2 = \{\langle p, 1\rangle, \langle q, 0\rangle, \ldots\}$	1	0	0	1	0
$V_3 = \{\langle p, 0\rangle, \langle q, 1\rangle, \ldots\}$	0	1	0	1	1
$V_4 = \{\langle p, 0\rangle, \langle q, 0\rangle, \ldots\}$	0	0	0	1	1

Für V_2 gilt, dass die Präm-Formel 1 ist, die Konk-Formel aber 0. Die Präm-Formel bildet also keine (AL-)Kon-Sequenz mit der Konk-Formel:

$$\{\sim(p \wedge q)\} \nvDash_{AL} \sim p$$

Das Deduktionstheorem von AL

Deduktionstheorem: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash_{AL} \beta$ gdw $\vDash_{AL} (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$

- Liest man so: Genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass die Präm-Formeln alle 1 sind, aber die Konk-Formel 0 ist, macht kein Modell die dazugehörige Formel, die man erhält, wenn man die Präm-Formeln mit dem Hut verbindet, danach einen Pfeil und die Konk-Formel schreibt, 0 (heißt: die dazugehörige Formel ist allgemeingültig)
- Nutzen: statt auf Konsequenz kann man auf Allgemeingültigkeit prüfen und umgekehrt
- Beispiele:

Kon-Sequenz				Formel
$\{\sim(p \wedge q)\}$	$\vDash_{AL}$	$\sim p$	gdw	$\{\} \vDash_{AL} (\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim p)$
$\{(p \rightarrow q), p\}$	$\vDash_{AL}$	q	gdw	$\{\} \vDash_{AL} ((p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q)$

Vokabeln

- Mengenlehre
  - Menge, n-Tupel, Element, Komponente
  - Funktion, Argumentbereich, Wertbereich
- Semantik
  - AL-Modell, Interpretationsfunktion
  - Farbcharakteristika der Junktoren (auswendig lernen!)
  - Farbtabellen (Formeln vs. Kon-Sequenzen), DN-Regel
  - Allgemeingültigkeit, Widersprüchlichkeit, Erfüllbarkeit
- Kon-Sequenz, Präm-Formeln, Konk-Formel
- Double Turnstile, Deduktionstheorem
- Außerdem: Notwendige und hinreichende Bedingung

Aufgaben

- Übungen:
  - 4. Auflage: S. 35, Nr. 2+3
  - 5. Auflage: S. 38, Nr. 2+3
- Lesen:
  - 4. Auflage: S. 41-52
  - 5. Auflage: S. 44-56

Bis nächste Woche!