Tutorium Logik

Argumentationstheorie und AL-Syntax

Agenda

- Argumentationstheorie
  - Argumente und Logik
  - Schlüsse, Gültigkeit und Beweiskraft
  - Tafelschwammtest
- AL-Syntax
  - Rekursive Definitionen
  - Atomare Formeln
  - Wohlgeformte Formeln
  - Junktoren

Arten von Argumenten

Argumentart	Deduktion	Induktion	Abduktion
Funktions-weise	Wenn die Prämissen wahr sind, ist die Konklusion notwendigerweise wahr	Wenn die Prämissen wahr sind, ist die Konklusion wahrscheinlich wahr	Die Konklusion ist die beste Erklärung für die Wahrheit der Prämissen
Beispiel	Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.	Alle bisher beobachteten Fische waren Kiemenatmer. Also sind alle Fische Kiemenatmer.	Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist sterblich. Also ist Sokrates ein Mensch.
Wissenschaft-licher Nutzen	Ableitung von Hypothesen aus gegebener Theorie	Hypothesenbildung und/oder -überprüfung	Theoriebildung
Informations-gehalt	uninformativ	gehaltserweiternd	gehaltserweiternd
Fehler	unmöglich	möglich → Zukunft	gut möglich

(Schurz, Einführung in die Wissenschaftstheorie, 47ff)

Schlüsse

n ist eine beliebige natürliche Zahl: 0, 1, 2, 3, …

Ein Schluss (engl.: „inference“)

- Ist der Kern eines Arguments, bestehend aus
  - n Behauptungen – genannt „Prämissen“
  - genau einer Schlussfolgerung – genannt „Konklusion“
- Lässt sich graphisch so darstellen:

Prämisse 1: [Behauptung]

…

Prämisse n: [Behauptung]

Konklusion: Also: [Schlussfolgerung]

genannt „Schlussform“

Schlüsse: Gültigkeit und Beweiskraft

Ein Schluss kann gültig sein, ohne dass auch nur eine einzelne Prämisse wahr ist!

Ein Schluss ist gültig (valid) genau dann, wenn gilt: Es ist nicht möglich, dass alle Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

Ein Schluss ist beweiskräftig (sound) genau dann, wenn gilt: Der Schluss ist gültig und alle Prämissen sind wahr.

Deduktive Argumente: Ein Beispiel aus dem Leben

Prämisse 1: Das Verbot von Cannabis ist nur dann gerechtfertigt, wenn es mehr nützt als schadet.

Prämisse 2: Es ist nicht der Fall, dass das Verbot von Cannabis mehr nützt als schadet.

Konklusion: Also ist das Verbot von Cannabis nicht gerechtfertigt.

Gültigkeit von Schlüssen: Der Tafelschwammtest I

- Problem: Wie finden wir heraus, ob ein Schluss gültig ist?
- Idee:
  - Es gibt bestimmte Strukturen, die gewährleisten, dass ein Schluss gültig ist
  - Die Wörter, durch die diese Strukturen entstehen, nennen wir „Strukturwörter“:

alle …	einige …	kein(e) …
… und …	… und/oder …	entweder … oder …
wenn …, dann …	… gdw …	Es ist nicht der Fall, dass … (nicht)

  - Alle anderen Wörter nennen wir „Inhaltswörter“

Gültigkeit von Schlüssen: Der Tafelschwammtest II

– Wir ersetzen alle Inhaltswörter durch Platzhalterbuchstaben (gleiche für gleiche)

– Wir lassen alle Strukturwörter stehen

– Wir prüfen, ob man die Platzhalterbuchstaben so durch Inhaltswörter ersetzen kann, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist

  - Wir finden ein Beispiel: Wir wissen, der Schluss ist nicht gültig
  - Wir finden kein Beispiel: Wir vermuten, der Schluss ist gültig

→ Wir können mit dem Tafelschwammtest lediglich beweisen, dass ein Schluss *nicht* gültig ist. Wir können jedoch nicht beweisen, dass er gültig ist!

Tafelschwammtest: Beispiel

Prämisse 1: Alles, was flüssig ist, enthält Wasser.
Prämisse 2: Apfelsaft ist flüssig.

Konklusion: Also: Apfelsaft enthält Wasser.

Tafelschwammtest: Inhalts- und Strukturwörter erkennen

Prämisse 1: Alles, was flüssig ist, enthält Wasser.

Prämisse 2: Apfelsaft ist flüssig.

Konklusion: Also: Apfelsaft enthält Wasser.

Tafelschwammtest: Inhaltswörter durch Platzhalterbuchstaben ersetzen

Prämisse 1: Alles A (ist) B.

Prämisse 2: C (ist) A.

Konklusion: Also: C (ist) B.

Tafelschwammtest: Platzhalterbuch-staben durch Inhaltswörter ersetzen

Prämisse 1: Alle Tiere sind Lebewesen.

Prämisse 2: Dolly (ist) ein Tier.

Konklusion: Also: Dolly (ist) ein Lebewesen.

→ Uns fällt keine Möglichkeit ein, die Inhaltswörter so zu ersetzen, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Deshalb *nehmen wir an*, dass es sich um einen gültigen Schluss handelt!

Tafelschwammtest: Auf Beweiskraft prüfen

Prämisse 1: Alles, was flüssig ist, enthält Wasser.

Prämisse 2: Apfelsaft ist flüssig.

Konklusion: Also: Apfelsaft enthält Wasser.

Prämisse 1 ist falsch (Gegenbeispiele: Öl, Quecksilber)
Prämisse 2 ist wahr (Saft ist per Definition flüssig)
→ Dieser Schluss ist zwar gültig, aber nicht beweiskräftig!

Tafelschwammtest: Aufgabe

Prämisse 1: Einige Frauen sind zickig.

Prämisse 2: Sheela ist eine Frau.

Konklusion: Also: Sheela ist zickig.

Aufgabe: Prüft mit dem Tafelschwammtest, ob es sich um einen gültigen Schluss handelt und ggf., ob er beweiskräftig ist.

alle …	einige …	kein(e) …
… und …	… und/oder …	entweder … oder …
wenn …, dann …	… gdw …	Es ist nicht der Fall, dass … (nicht)

TAFELSCHWAMMTEST: LÖSUNG I

Prämisse 1: Einige Frauen sind zickig.
Prämisse 2: Sheela ist eine Frau.

Konklusion: Also: Sheela ist zickig.

TAFELSCHWAMMTEST: LÖSUNG II

Prämisse 1: Einige A (sind) B.

Prämisse 2: C (ist) A.

Konklusion: Also: C (ist) B.

Tafelschwammtest: Lösung III

Prämisse 1: Einige Menschen sind reich.

Prämisse 2: Vitus ist ein Mensch.

Konklusion: Also: Vitus ist reich.

Wir haben es geschafft, die Inhaltswörter so zu ersetzen, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Folglich ist der Schluss nicht gültig!

Tafelschwammtest: Aufgabe

Prämisse 1: Alle Gurken bestehen aus Granit.

Prämisse 2: Wenn alle Gurken aus Granit bestehen, ist die Erde eine Scheibe.

Konklusion: Also: Die Erde ist eine Scheibe.

Aufgabe: Prüft mit dem Tafelschwammtest, ob es sich um einen gültigen Schluss handelt und ggf., ob er beweiskräftig ist.

alle …	einige …	kein(e) …
… und …	… und/oder …	entweder … oder …
wenn …, dann …	… gdw …	Es ist nicht der Fall, dass … (nicht)

Tafelschwammtest: Lösung I

Prämisse 1: Alle Gurken bestehen aus Granit.

Prämisse 2: Wenn alle Gurken aus Granit bestehen, ist die Erde eine Scheibe.

Konklusion: Also: Die Erde ist eine Scheibe.

Tafelschwammtest: Lösung II

Prämisse 1: Alle A (sind) B.

Prämisse 2: Wenn alle A B (sind), ist C D.

Konklusion: Also: C ist D.

Tafelschwammtest: Lösung III

Prämisse 1: Alle Säugetiere sind Lebewesen.

Prämisse 2: Wenn alle Säugetiere Lebewesen sind, ist Bernd sterblich.

Konklusion: Also: Bernd ist sterblich.

Wir finden kein Gegenbeispiel. Also nehmen wir an, dass der Schluss gültig ist!

Tafelschwammtest: Lösung IV

Prämisse 1: Alle Gurken bestehen aus Granit.

Prämisse 2: Wenn alle Gurken aus Granit bestehen, ist die Erde eine Scheibe.

Konklusion: Also: Die Erde ist eine Scheibe.

Sowohl Prämisse 1 als auch Prämisse 2 sind falsch: Der Schluss ist gültig, aber nicht beweiskräftig!

Sätze: Logische Wahrheit

Ein Satz ist logisch wahr genau dann, wenn gilt: Es ist nicht möglich, dass er falsch ist.

Für den Tafelschwammtest heißt das: Ein Satz ist logisch wahr genau dann, wenn gilt: Jede Ersetzung der Inhaltswörter ergibt einen wahren Satz.

Man kann logisch wahre Sätze als gültige Null-Prämissen-Schlüsse auffassen.

Der Tafelschwammtest-Filmriss

Aufgabe: Betrachtet die folgenden Folien als inhaltlich völlig getrennt von den bisherigen Folien zum Tafelschwammtest. Akzeptiert, dass ihr in den nächsten Wochen Definitionen und Methoden lernen werdet, ohne eine Ahnung zu haben, was das Ganze mit Argumenten zu tun hat.

AL-Syntax: Alphabet

AL ist ein völlig sinnfreies Spiel, das einer Sprache ähnelt.

Das Alphabet von AL besteht aus den Zeichentypen
„p“, „*“ (Stern), „~“ (Tilde), „(“, „)“ „∧“ (Hut).

Hut und Tilde nennen wir „Junktoren“.

AL-Syntax

Eine Syntax

- Ist eine Menge an Regeln, die bestimmt, welche Zeichenkombinationen in einer Sprache sinnvolle Phrasen/Sätze ergeben (und welche nicht)
- Beispiel (Deutsch):
  - Regel: Ein wohlgeformter Aussagesatz enthält mindestens ein Subjekt und mindestens ein Prädikat
  - regelkonform: „Vitus ist Logiktutor“ → wohlgeformter Aussagesatz
  - regelwidrig: „Bier schnellstens“ → kein wohlgeformter Aussagesatz

→ Genau so, wie das Deutsche Regeln für wohlgeformte Aussagesätze hat, hat AL Regeln für wohlgeformte Formeln!

AL-SYNTAX: REKURSIVE DEFINITIONEN

<u>Eine rekursive Definition</u>

- Ist eine Definition, bei der mindestens eine Regel immer und immer wieder angewandt wird
- ermöglicht, eine Menge an (abzählbar) unendlich vielen Gegenständen zu definieren
- Heißt so, weil jedes durch sie definierte Element einer Menge auf ein erstes Element zurückzuführen ist (lat. "recurrere" - "auf etwas zurücklaufen")
- Wird manchmal auch „induktive Definition“ genannt

AL-Syntax: Rekursive Definitionen – ein Beispiel

Schritt	Erklärung	Beispiel
Basisklausel	Bestimmt das erste Element der zu definierenden Menge.	„0“ ist eine natürliche Zahl.
Rekursions-klausel	Gibt die Regel an, nach der man mithilfe des ersten Elements weitere Elemente der Menge bestimmen kann.	Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann auch ⌜n+1⌝.
Abschluss-klausel	Stellt sicher, dass die zu definierende Menge ausschließlich das Basiselement und die Rekursionselemente enthält.	Sonst ist nichts eine natürliche Zahl.

AL-Syntax: Atomare Formeln

Objektsprache! Metasprache!

1. Basisklausel „p" ist eine atomare Formel von AL.
2. Rekursionsklausel Wenn α eine atomare Formel von AL ist,
   dann ist auch ⌜α*⌝ eine atomare Formel von AL.
3. Abschlussklausel Nichts sonst ist eine atomare Formel von AL.

Konvention: „p*" kürzen wir mit „q" ab,
„p**" kürzen wir mit „r" ab.

AL-Syntax: Wohlgeformte Formeln

1.	Basis-klausel	Jede atomare Formel von AL ist eine wohlgeformte Formel von AL.
2.1	Rekursions-klausel I	Wenn α eine wohlgeformte Formel von AL ist, dann auch ⌜~α⌝.
2.2	Rekursions-klausel II	Wenn α und β wohlgeformte Formeln von AL sind, dann ist auch ⌜(α ∧ β)⌝ eine wohlgeformte Formel von AL.
3.	Abschluss-klausel	Sonst ist nichts eine wohlgeformte Formel von AL.

Konvention: Wir kürzen „wohlgeformte Formel“ mit „wff“ ab.

AL-Syntax: Mehr Junktoren

Seien α und β wohlgeformte Formeln (wffs) von AL. Dann gilt:

1. $\ulcorner{\sim}({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)\urcorner$ darf durch $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.
2. $\ulcorner{\sim}(\alpha \wedge {\sim}\beta)\urcorner$ darf durch $\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.
3. $\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)\urcorner$ darf durch $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.
4. $\ulcorner(\alpha \vee \beta) \wedge {\sim}(\alpha \wedge \beta)\urcorner$ darf durch $\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.

Aus den Definitionen ergibt sich: Wenn α und β wohlgeformte Formeln sind, dann auch $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ und $\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner$!

AL-Synatx: Konventionen zu Junktoren

1.	„v“	nennen wir	„Eistüte“.
2.	„→“	nennen wir	„Pfeil“.
3.	„≡“	nennen wir	„Spaghetti“.
4.	„∇“	nennen wir	„Dreieck“.
5.	Die Zeichen aus 1. – 4.	nennen wir	„Junktoren“.

Außerdem: Bei wffs, deren Hauptjunktor nicht die Tilde ist, dürfen die äußeren Klammern – falls vorhanden – weglassen werden.

Beispiel: „p → (q v r)“ statt „(p → (q v r))“

AL-Syntax: Hauptjunktor

Der Hauptjunktor einer wff

- Ist derjenige Junktor, der gemäß der Syntaxregeln als letztes hinzugefügt worden sein muss
- Steht daher immer in der äußersten Klammer (wenn man die äußeren Klammern nicht weglässt!)
- Erstreckt sich über die komplexesten wffs
- Beispiele:
  - $p \vee (p \rightarrow q)$
  - $p^* \nabla (r \rightarrow p)$
  - $(p^* \nabla r) \rightarrow p$

AL-Syntax: Ein Beispiel

Frage: Warum ist „$(p \rightarrow q)$“ eine wohlgeformte Formel?

Die Formel	Ist eine wff, weil	Regel
„$(p \rightarrow q)$“	sie „$\sim(p \wedge \sim q)$“ abkürzt	Definition→
„$\sim(p \wedge \sim q)$“	„$(p \wedge \sim q)$“ eine wff ist	Rekursionsklausel I wff
„$(p \wedge \sim q)$“	„p“ und „~q“ wffs sind	Rekursionsklausel II wff
„p“	Sie eine wff Formel ist	Basisklausel at. Formel/wff
„q“	Abkürzung für „p*“,	Rekursionsklausel at. Formel
„~q“	„q“ eine wff ist	Rekursionsklausel I wff

→ An diesem Beispiel können wir erkennen, warum wir von rekursiven Definitionen reden!

AL-Syntax: Aufgabe

Aufgabe: Entscheidet anhand der Syntax von AL, ob es sich bei den folgenden Zeichenkombinationen um wohlgeformte Formeln handelt oder nicht. Bestimmt, falls sinnvoll, den Hauptjunktor.

[1] $p \land \sim q$

[2] $p \lor (p \land \sim q)$

[3] $p \land \sim qr$

[4] $\sim\sim q$

[5] $p \land \land r$

[6] $\alpha \rightarrow \beta$

AL-Syntax: Lösung

Zeichenkombination	wff?	Begründung
$p \land {\sim}q$	✓	„p“ und „${\sim}q$“ sind wffs
$p \lor (p \land {\sim}q)$	✓	„p“ und „$(p \land {\sim}q)$“ sind wffs
$p \land {\sim}qr$	✗	„${\sim}qr$“ ist keine wff
${\sim}{\sim}q$	✓	„${\sim}q$“ ist eine wff
$p \land \land r$	✗	Weder „$p\land$“ noch „$\land r$“ sind wffs
$\alpha \rightarrow \beta$	✗	„α“ und „β“ gehören nicht zum Alphabet von AL

Vokabeln

- Schluss(form), Prämisse, Konklusion
- Gültigkeit, Beweiskraft, Strukturwörter, Inhaltswörter
- Junktoren, Hauptjunktor
- rekursive Definition, Syntax
- Atomare Formel, wohlgeformte Formel

Aufgaben

- Logikbuch beschaffen (falls noch nicht vorhanden)!
- Übungen:
  - 4. Auflage: S. 32, Nr. 1; S. 33, Nr. 3
  - 5. Auflage: S. 34, Nr. 1 und 3
- Lesen (ab „Semantik von AL“):
  - 4. Auflage: S. 30 (Mitte) - S. 35
  - 5. Auflage: S. 31 (unten) - S. 37

Bis nächste Woche!