Schauen wir uns zunächst klare Definitionen von „Graph“ und „Funktion“ an:

> A class of ordered pairs is called a *graph*. In other words, a graph is an arbitrary subclass of U x U. [1]

> [A] *function* from A to B *is a rule* which to every element $x \in A$ assigns a unique element $y \in B$; to indicate this connection between x and y we usually write $y = f(x)$. […]. […] If f is a function from A to B, then the *graph* of f is the class of all ordered pairs (x, y) such that $y = f(x)$. [2]

Das bedeutet: Graphen sind Relationen, Funktionen sind Anweisungen und der Graph einer Funktion ist die Menge aller Zweiertupel (x, y), sodass $y = f(x)$. Warum sind Funktionen nun keine Graphen? Mir fallen spontan drei Fälle ein:

(I) Die Graphen zweier Funktionen f und g sind identisch, aber deren Anweisungen nicht. Beispiel:

   a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=\sin(x)$

   b. $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1], g(x)=\sin(x)$

(II) Einige Funktionen haben keine Graphen. Beispiel: Die Funktion, die jeder Menge diejenige Menge zuordnet, die jene als einziges Element enthält. (Der Wertebereich kann keine Menge sein, höchstens eine echte Klasse).

(III) Einige Eigenschaften von Funktionen kann man nicht am Graph selbst ablesen (beispielsweise Surjektivität).

Hier noch ein paar andere Definitionen aus Einführungsbüchern (Kursivierungen hauptsächlich von mir):

i. Function, as understood in mathematics, is *a procedure, a rule*, assigning to any object a from the domain of the function a unique object b, the value of the function at a. A function, therefore, *represents* a special type of relation, a relation where every object a from the domain is related to precisely one object in the range, namely, to the value of the function at a.[3]

ii. Unter einer Funktion f von einer Menge A in eine Menge B (in Zeichen $f: A \rightarrow B$) versteht man eine "*Vorschrift*" [sic!], die jedem Element x der Menge A genau

---

[1] Pinter, *A Book of Set Theory*, 37.

[2] Pinter, 49.

[3] Hrbacek und Jech, *Introduction to Set Theory*, 23.

ein Element y der Menge B zuordnet. Man nennt A den Definitionsbereich von f. [4]

iii. Mit (F) wird der Funktionsbegriff wie üblich auf den Mengenbegriff zurückgeführt: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ wird mengentheoretisch definiert als $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Diese Menge wird oft auch als der *Graph* von f bezeichnet.[5]

iv. From algebra and calculus, we know what a function is. It is *a rule* that assigns to each possible input value a unique output value. […] Let A and B be sets. A *relation* $f \subseteq A \times B$ is a function […]. [6]

Definition i. und ii. gehen mit Pinter einher. Ebbinghaus hingegen identifiziert in iii. Funktionen mit ihren Graphen. O'Leary widerspricht sich in iv. sogar: Erst sind Funktionen Regeln, dann Mengen. Aber Mengen sind keine Regeln! Suppes beschreibt diesen unglücklichen Zustand wie folgt:

> Since the eighteenth century, clarification and generalization of the concept of a function have attracted much attention. Fourier's representation of "arbitrary" functions (actually piecewise continuous ones) by trigonometric series encountered much opposition; and later when Weierstrass and Riemann gave examples of continuous functions without derivatives, mathematicians refused to consider them seriously. Even today many textbooks of the differential and integral calculus do not give a mathematically satisfactory definition of functions. An exact and completely general definition is immediate within our set-theoretical framework. A function is simply a many-one relation, that is, a relation which to any element in its domain relates exactly one element in its range. (Of course, distinct elements in the domain may be related to the same element in the range.) The formal definition is obvious. [7]

Der einzige Autor, der eine einigermaßen zufriedenstellende Auffassung von Funktionen gibt (und den ich auf die Schnelle gefunden habe), ist Devlin. Er beschreibt Funktionen als aus drei Teilen bestehend (S. 88):

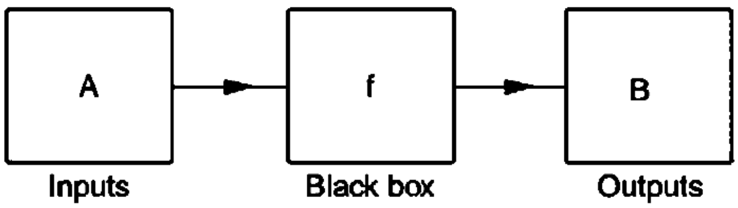

Figure 4.2: The three parts of a function.

Außerdem gibt er eine schöne Definition für die Identität zweier Funktionen (nicht zweier Graphen!):

> In general, we say two functions f, g are equal iff they have the same domain (say A), the same codomain (say B), and for every $a \in A$, $f(a) = g(a)$. […] This definition of function equality means that we should not really speak of a function as being a rule

[4] Friedrichsdorf und Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, 10.

[5] Ebbinghaus, Flum, und Thomas, *Einführung in die Mathematische Logik*, 112.

[6] O'Leary, *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory*, 149.

[7] Suppes, *Axiomatic Set Theory*, 86.

> that takes arguments from the domain and produces values in the codomain. Rather a function is *determined* by such a rule. It is not the rule itself that is the function, even assuming we are careful to specify the domain and codomain (as we should). It is the *argument-to-value association* the rule determines that is "the function" [sic!]. [8]

Auf den folgenden Seiten gibt er auch einen kurzen historischen Überblick (angehängt). Abschließend befürchte ich, dass die Meinung, die Deiser vertritt, von vielen Mathematiker:innen geteilt wird:

> Hier geht es nicht um Ontologie −was ist π? −, sondern um präzise und brauchbare, sich im Aufbau einer Theorie natürlich ergebende Definitionen − z. B. π/2 ist definiert als „die kleinste positive Nullstelle der Cosinus-Funktion“ .Was man sich unter den mathematischen Objekten schließlich vorstellt und welche Eigenschaften der Objekte am wichtigsten erscheinen, ist jedem Mathematiker selbst überlassen − z.B. π als fundamentale Größe zur Berechnung von Umfang und Inhalt des Kreises. [9]

Literatur

Deiser, Oliver. *Einführung in die Mengenlehre*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-642-01445-1.

Devlin, Keith J. *Sets, Functions, and Logic: An Introduction to Abstract Mathematics*. 3rd ed. Chapman & Hall/CRC Mathematics. Boca Raton, Fla: Chapman & Hall/CRC, 2004.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum, und Wolfgang Thomas. *Einführung in die Mathematische Logik*. 6., überarbeitete und erweiterte Auflage. Lehrbuch. Berlin: Springer Spektrum, 2018.

Friedrichsdorf, Ulf, und Alexander Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1985. https://doi.org/10.1007/978-3-322-89856-2.

Hrbacek, Karel, und Thomas J Jech. *Introduction to Set Theory*. New York: M. Dekker, 1999. http://www.netLibrary.com/urlapi.asp?action=summary&v=1&bookid=12858.

O’Leary, Michael L. *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2016.

Pinter, Charles C. *A Book of Set Theory*. Newburyport: Dover Publications, 2014. http://qut.eblib.com.au/patron/FullRecord.aspx?p=1920027.

Suppes, Patrick. *Axiomatic Set Theory*. New York: Dover Publications, 1972.

---

[8] Devlin, *Sets, Functions, and Logic*, 92.

[9] Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, 43.