Was haben Drehkreuze mit Logik zu tun?

In der Logik verwendet man zwei merkwürdige Zeichen, die anfangs etwas schwieriger zu verstehen sind: „⊢“ und „⊨“. Es sind keine Formeln, keine Junktoren, aber auch keine Quantoren, und trotzdem tauchen sie immer in Kombination mit Formeln auf. Wo kommen diese Zeichen also her, was bedeuten sie, wie benutzt man sie und wie hängen sie zusammen? Diese Fragen werde ich im Folgenden erläutern.

Fangen wir mit dem Zeichen „⊨“ an. Wir nennen es „Double Turnstile“. Das englische Wort „turnstile“ kommt daher, dass das Zeichen an ein Drehkreuz erinnert. Der Ausdruck „double“ wird ergänzt, um – in Abgrenzung zum einfachen Turnstile, um den es gleich gehen wird – darauf hinzuweisen, dass an dem vertikalen Strich nicht nur ein, sondern gleich zwei horizontale Striche angebracht sind. Der Double Turnstile ist kein Zeichen von AL oder PL, sondern ein metasprachliches Zeichen: Wir benutzen ihn, *um Behauptungen über logische Sprachen aufzustellen*. Da nach dem Double Turnstile immer objektsprachliche Ausdrücke folgen, lässt man die Anführungszeichen in der Regel aus.

Der Double Turnstile behauptet Folgendes: Es ist nicht möglich, dass das, was vor ihm steht, wahr ist, aber das, was nach ihm steht, falsch. Normalsprachlich können wir sagen: Aus dem, was vor ihm steht, folgt (semantisch, dazu gleich mehr) das, was nach ihm steht. Ich werde nun anhand eines Tableau-Beweises erklären, wie man das Zeichen benutzt.

Nehmen wir an, wir möchten mithilfe der Tableau-Methode zeigen, dass der *modus ponens* ein gültiger Schluss ist. Dafür müssen wir in AL zeigen, dass zwischen den Prämissen – nämlich „$p \rightarrow q$“ und „p“ – und der Konklusion – „q“ – eine *Kon-Sequenz* besteht.

Zuallererst machen wir kenntlich, *dass* wir vorhaben, etwas zu beweisen. Das machen wir, indem wir die Abkürzung „zz:“, die für „zu zeigen:“ steht, benutzen. Danach möchten wir offenlegen, *was* wir vorhaben zu beweisen. Dafür schreiben wir alle Prämissen des Schlusses, mit Kommata getrennt, in eine Mengenklammer, danach den Double Turnstile und daraufhin die Konklusion. In unserem Fall sähe das dann so aus:

[1] zz: $\{p \rightarrow q, p\} \vDash q$ Kon-Sequenz des modus ponens

Damit behaupten wir: Es ist nicht möglich, dass jede Formel in der Mengenklammer – also jede Prämisse – wahr ist, aber das, was nach dem Double Turnstile kommt – also die Konklusion – falsch ist. Oder, anders ausgedrückt: Wir behaupten, dass, wenn die Prämissen alle wahr sind, die Konklusion auch wahr sein muss. Was wir auf der (meta-)logischen Ebene als „Kon-Sequenz“ bezeichnen, nennen wir in der normalen Sprache einen „gültigen Schluss“.

Nun haben wir zwar unser Beweisziel formuliert, aber den Beweis selbst nicht einmal angefangen. Damit geht es nun weiter. Da der Tableau-Beweis ein indirekter Beweis ist, nehmen wir zuerst das (kontradiktorische) Gegenteil von dem an, was wir behauptet haben. Wir nehmen also an, dass alle Prämissen wahr sind, aber die Konklusion falsch ist. Das machen wir, indem wir Prämissen und Konklusion mit einem vertikalen Strich („|“) verbinden, wobei wir die Prämissen so lassen, wie sie sind, und die Konklusion negieren. Diese negierte Konklusion nennen wir dann "reductio-Annahme". Nun zerlegen wir die Formeln im Tableau mithilfe der Tableau-Regeln, bis wir keine der Regeln mehr sinnvoll anwenden können.

Wenn es nun an jedem Ast zu Widersprüchen kommt, wissen wir, dass es nicht möglich ist, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Das ist beim *modus ponens* der Fall. Da das genau das ist, was der Double Turnstile behauptet, können wir also sagen, dass die Prämissenmenge – „$\{p \rightarrow q, p\}$“ – mit der Konklusion – „q“ – eine Kon-Sequenz bildet. Auf normalsprachlicher Ebene heißt das: Jeder Schluss, der diese Struktur hat, ist gültig. Man kann dann unter das Tableau "q. e. d." schreiben. Das ist eine Abkürzung für "quod erat demonstrandum" und bedeutet so viel wie "das, was zu zeigen war". Wir weisen also darauf hin, dass wir unser Beweisziel erreicht haben.

Nun fragt man sich vielleicht, wieso der Double Turnstile auch bei Formeltableaux auftritt, wenn es doch gerade noch um Prämissen und Konklusion ging; Formeln entsprechen schließlich normalsprachlich ganzen Sätzen und enthalten deshalb weder Prämissen noch Konklusionen.

Die Antwort lautet wie folgt: Es gibt einen systematischen Zusammenhang zwischen Kon-Sequenzen und Allgemeingültigkeit. Diesen Zusammenhang drückt das (semantische) Deduktionstheorem aus. Es lautet wie folgt:

[2] $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ gdw $\vDash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ Deduktionstheorem (semantisch)

Wir können also aus einem Schluss eine Formel machen, indem wir den Double Turnstile an den Anfang der Formel schreiben, die Prämissen mit Konjunktionen verbinden und die daraus entstandene Prämissenmenge wiederum mit der Konklusion verknüpfen; das machen wir mithilfe des Konditionals.

Wenn wir nun zeigen wollen, dass die Formel zum *modus ponens* allgemeingültig ist, müssen wir ihn zuallererst in Formelform bringen. Dafür machen wir Gebrauch vom Deduktionstheorem. In unserem Beispiel sähe das so aus:

[3] $\vDash (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ Allgemeingültigkeit des m.p.p. als Formel

Wichtig ist an dieser Stelle zu bemerken, dass der Double Turnstile immer dieselbe Bedeutung hat – egal, ob er zwischen der Prämissenmenge und der Konklusion oder vor eine Formel steht. Eigentlich ist [3] nämlich eine Abkürzung und besagt Folgendes:

[4] $\{\ \} \vDash (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ Langform von [3]

Wie üblich behauptet man mit dem Double Turnstile: Es ist nicht möglich, dass das, was vor ihm steht, wahr ist, aber das, was danach kommt, falsch. Das, was vor ihm steht, ist in unserem Fall aber die leere Menge; sie enthält keine Formeln, die wahr sein können. Das, was nach ihm steht, ist eine Formel, und die kann wahr sein. Die Bedeutung des Double Turnstiles lässt sich in diesem Fall also auf folgende Behauptung reduzieren: Die Formel nach dem Double Turnstile kann nicht falsch sein. Da eine Formel genau dann allgemeingültig ist, wenn sie in jedem Modell wahr wird, also in keinem falsch, behaupten wir hiermit nichts anderes, als dass die Formel nach dem Double-Turnstile allgemeingültig ist. Hier wird nun klar, dass es um Modelle und Wahrheitswerte geht. Deshalb ist der Double Turnstile ein *semantisches Zeichen*.

Wir wissen nun, was der Double Turnstile bedeutet, und wie man ihn benutzt. Wir haben auch den Zusammenhang zwischen der Gültigkeit eines Schlusses und der Allgemeingültigkeit der dazugehörigen Formel besprochen. Was wir aber noch nicht behandelt haben, ist das Zeichen „$\vdash$“, das wir „Turnstile“ nennen. Das Wort „double“ fehlt, weil nur ein einzelner vertikaler Strich am horizontalen hängt.

Der Turnstile ist genauso wie der Double Turnstile ein metasprachliches Zeichen. Auch er schluckt die objektsprachlichen Anführungszeichen. Er verweist aber – im Gegensatz zum Double Turnstile – nicht auf eine semantische, sondern auf eine *syntaktische Folge*: Es geht nicht darum, dass, wenn die

Formeln in der Menge wahr sind, die Formel nach dem Turnstile auch wahr sein muss; es geht darum, dass man mithilfe der Formeln aus der Mengenklammer vor dem Turnstile und den Regeln eines Herleitungsspiels die Formel nach dem Turnstile herleiten kann. Auch das werde ich im Folgenden am *modus ponens* erklären und wähle das Kalkül des natürlichen Schließens als Herleitungsspiel.

Wenn wir zeigen wollen, dass der *modus ponens* herleitbar ist, müssen wir zeigen, dass man, wenn man seine Prämissen als Hypothesen annimmt, mithilfe der Herleitungsregeln zur Konklusion gelangt. Diese metasprachliche Behauptung schreiben wir so auf:

[5] zz: $\{p \to q, p\} \vdash q$ Herleitbarkeit des modus ponens

Der dazugehörige Beweis in K-AL gestaltet sich erstaunlich einfach. Wir müssen lediglich die Prämissen annehmen und eine einzelne Herleitungsregel anwenden, um zum Ziel zu gelangen:

Sterne	Zeile	Formel	Bezugszeile	Regel
*	1	$p \to q$	-	Hyp
*	2	p	-	Hyp
* *	3	q	1, 2	E→

Man kann die letzte Zeile wie folgt vorlesen: Unter der Annahme der Zeichenkette „p → q“ und unter der Annahme des Zeichens „p“ ist das Zeichen „q“ herleitbar. Wir haben also unser Beweisziel erreicht und können „q. e. d.“ darunterschreiben, um darauf aufmerksam zu machen. Wie das Wort „Zeichenkette“ andeutet, geht es hier nicht um Wahrheitswerte, sondern lediglich um *Kombinationen von Zeichen des Spiels AL.*

Auf dieselbe Weise, wie das semantische Deduktionstheorem den Zusammenhang zwischen Konsequenzen und allgemeingültigen Formeln etabliert, etabliert das syntaktische Deduktionstheorem den Zusammenhang zwischen Herleitbarkeit und Beweisbarkeit:

[6] $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ gdw $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$ Deduktionstheorem (syntaktisch)

Man kann es so vorlesen: Genau dann, wenn eine Formel aus einer Prämissenmenge *herleitbar* ist, ist die dazugehörige Formel – die dadurch entsteht, dass wir die Formeln aus der Prämissenmenge mit Konjunktionen verbinden und die dadurch entstandene Prämissenformel durch einen Pfeil mit der Konklusion verbinden – *beweisbar*. Die Motivation ist auch sehr intuitiv: Da wir den Pfeil als „wenn …, dann“ deuten, erfüllt sein Antezedens dieselbe Funktion wie die Sternspalte im Kalkül des natürlichen Schließens: Es gibt die Bedingungen für eine (hier: syntaktische) Folge an. Wenn wir das syntaktische Deduktionstheorem auf den modus ponens anwenden, erhalten wir folgende Behauptung:

[5] $\vdash (p \to q) \wedge p \to q$ Beweisbarkeit des modus ponens als Formel

Hiermit behaupten wir, dass die Formel zum modus ponens ohne Prämissen herleitbar ist. Da wir eine Herleitung, die nicht von Prämissen abhängt, „Beweis“ nennen, haben wir die Formel zum *modus ponens* bewiesen. Interessanterweise erfüllt die Zusatzregel $I{\rightarrow}^{+}$ für K-AL dieselbe Funktion wie das syntaktische Deduktionstheorem.

Wir kennen nun das einfache Drehkreuz und das zweifache Drehkreuz und wissen, dass ersteres ein syntaktisches Zeichen ist und letzteres ein semantisches. Nun könnte man sich aber fragen, ob es einen Zusammenhang zwischen diesen Zeichen gibt; Syntax und Semantik sind zwar zwei verschiedene Ebenen einer logischen Sprache, aber irgendwie sind sie ja miteinander verbunden: Erst, wenn wir Regeln haben, wie wir Zeichen aneinanderreihen dürfen, können wir für diese Zeichen Wahrheitswerte vergeben – man braucht eine Syntax, um Semantik betreiben zu können. Auf der anderen Seite scheint aber auch die Verbindung zwischen logischer Sprache und Normalsprache ohne die Semantik nicht sinnvoll, weil es ohne sie lediglich um Zeichenkombinationen geht, die keine weitere Bedeutung haben.

Diese Überlegung lässt uns vermuten, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Double Turnstile und dem Turnstile, zwischen syntaktischer und semantischer Folge geben sollte: Was syntaktisch folgt, folgt semantisch, und was semantisch folgt, folgt auch syntaktisch. Die erste Vermutung nennen wir „Korrektheit“, die zweite „Vollständigkeit“. Wir können sie so aufschreiben:

[6] Wenn $\vdash \alpha$, dann $\vDash \alpha$ Korrektheit
[7] Wenn $\vDash \alpha$, dann $\vdash \alpha$ Vollständigkeit

Der Grundsatz der Korrektheit behauptet: Alle Formeln, die man herleiten kann, sind auch allgemeingültig. Der Grundsatz der Vollständigkeit besagt: Alle Formeln, die allgemeingültig sind, kann man auch herleiten. Ob diese Behauptungen nun stimmen oder nicht, hängt stark von Syntax, Semantik und Herleitungsspielen der logischen Sprache ab; diese Komponenten müssen perfekt aufeinander abgestimmt sein. Glücklicherweise sind die Herleitungsspiele für AL und PL aber sowohl korrekt als auch vollständig. Das bedeutet im Spezifischen: Wenn man mithilfe einer Wahrheitswerttabelle oder eines Tableaus zeigt, dass eine Formel allgemeingültig ist, so muss man sie in K-AL auch herleiten können. Anders herum gilt das Gleiche: Wenn man eine Formel in K-AL hergeleitet hat, so muss sie in jedem Modell wahr sein. Systeme, die sowohl korrekt als auch vollständig sind, werden auch manchmal „*adäquat*“ genannt.