Zur Notation:

Seien χ und υ zwei voneinander verschiedene Individuenvariablen und ξ ein beliebiger aussagenlogischer Junktor. Sei $\alpha[\chi]$ eine wff, in der χ vorkommt. Sei $\beta[\upsilon]$ eine wff, in der υ vorkommt. Weiterhin fordern wir, dass $\not\models_{PL} (\alpha[\chi]\ \xi\ \beta[\upsilon])$.
Ein Beispiel:

Schema: $\forall\chi\exists\upsilon\ (\alpha[\chi]\ \xi\ \beta[\upsilon]) \leftrightarrow \exists\chi\ (\alpha[\chi]\ \xi\ \forall\upsilon\ \beta[\upsilon])$

Instanz: $\forall x\exists y\ (Rxa \rightarrow Ryx) \leftrightarrow \exists x\ (Rxa \rightarrow \forall y\ Rxy)$

Legende:

$\rightarrow$: Downward Implication gilt (*salva veritate* reinschiebbar)

$\nrightarrow$: Downward Implication gilt nicht (nicht *salva veritate* reinschiebbar)

$\leftarrow$: Upward Implication gilt (*salva veritate* rausziehbar)

$\nrightarrow$: Upward Implication gilt nicht (nicht *salva veritate* rausziehbar)

Erläuterung zu den Kürzeln:

Auf der linken Seite des Bikonditionals haben beide Quantoren denselben Klammerskopus, nämlich $(\alpha[\chi]\ \xi\ \beta[\upsilon])$. Die Zeichenkombination vor dem Komma gibt an, in welcher Reihenfolge die Quantoren vor diesem Klammerskopus stehen.

Auf der rechten Seite des Bikonditionals steht ein Quantor(token) im Klammerskopus eines anderen. Die Zeichenkombination nach dem Komma gibt an, welcher Quantor(token) vor und welcher Quantor in den Klammern steht.

Um das an unserem Beispiel zu verdeutlichen: Auf der linken Seite des Bikodonditionals steht zuerst der All- und dann der Existenzquantor, also steht im Kürzel links vor dem Komma „∀∃”. Auf der rechten Seite ist der Allquantor im Klammerskopus vom Existenzquantor. Deshalb steht im Kürzel rechts vom Komma “∃(∀)“, sodass das Kürzel insgesamt „∀∃, ∃(∀)“ ist.

Auf der linken Seite des Bikonditionals haben wir zwei Quantoren und zwei Stellen, also 2^2=4 Kombinationsmöglichkeiten. Auf der rechten Seite gilt dasselbe. Folglich gibt es insgesamt 4x4=16 Kombinationsmöglichkeiten pro Junktor. Genau diese Kombinationsmöglichkeiten deckt die untenstehende Tabelle ab.

Übersicht: Wann kann man Quantoren rein- und rausziehen?

Kürzel	Formelschema	∧	∨	←	→	↔
∀∀, ∀(∀)	∀χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←→	←→	↚→	←→	↚→
∃∃, ∃(∃)	∃χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	←→	←→	←→	←→	←↛
∀∃, ∀(∃)	∀χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	←→	←→	←↛	←→	←↛
∃∀, ∃(∀)	∃χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←→	←→	←→	←→	↚→
∃∀, ∀(∃)	∃χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	↚↛	↚↛	←↛	↚→	↚↛
∃∀, ∃(∃)	∃χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	↚→	↚→	←→	↚→	↚→
∃∀, ∀(∀)	∃χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←↛	←↛	↚→	←↛	↚↛
∀∃, ∃(∀)	∀χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	↚↛	↚↛	←→	←↛	←↛
∀∃, ∃(∃)	∀χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	↚→	↚→	←↛	←→	←↛
∀∃, ∀(∀)	∀χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←↛	←↛	←→	←↛	←↛
∀∀, ∃(∀)	∀χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	↚→	↚→	↚→	↚→	↚→
∀∀, ∀(∃)	∀χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	↚→	↚→	←→	↚→	↚→
∀∀, ∃(∃)	∀χ∀υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	↚→	↚→	↚→	↚→	↚→
∃∃, ∃(∀)	∃χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∃χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←↛	←↛	←→	←↛	←↛
∃∃, ∀(∃)	∃χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∃υ β[υ])	←↛	←↛	←↛	←↛	←↛
∃∃, ∀(∀)	∃χ∃υ (α[χ] ξ β[υ]) ↔ ∀χ (α[χ] ξ ∀υ β[υ])	←↛	←↛	←→	←↛	←↛

ξ=←: Der Quantor im Klammerskopus der rechten Seite des Bikonditionals steht im Antezedens des Konditionals.

ξ=→: Der Quantor im Klammerskopus der rechten Seite des Bikonditionals steht im Sukzedens des Konditionals.

Ein paar Take-home-Messages:

1) Die Implikationsrichtungen für ξ=∧ und ξ=∨ sind identisch. Warum?

2) Ist der Hauptjunktor des Quantorenskopus der rechten Seite des Bikonditionals ein Bikonditional, gibt es in keinem Fall eine äquivalente Formel, sodass dieselben Quantoren denselben Klammerskopus haben.

3) Bei Formeln der Formen ∃∀, ∃(∀), und ∃∃, ∃(∃) kann man, sofern ξ ≠ ↔, Quantoren aus der Formel *salva veritate* Rein- und Rausziehen.

4) Bei Formeln der Form ∀∃, ∀(∃) geht das auch, sofern ξ ≠ ↔ und ξ ≠ ←.

Ist jeder Gegenstand die Welt?

In meinen Folien zum Priestvortrag habe ich bewiesen, dass in Priests Logik folgende Behauptung wahr ist:

$$\models \forall y \exists z\, (Gz \land z{\circ}y \leftrightarrow y{\circ}a)$$

Weil ich annahm, dass auch

$$\models \forall y \exists z\, (Gz \land z{\circ}y \leftrightarrow y{\circ}a) \leftrightarrow \forall y\, (\exists z\, (Gz \land z{\circ}y) \leftrightarrow y{\circ}a)$$

eine wahre Behauptung ist, die rechte Seite des Bikonditionals die Definition für Fu(a, G) ist und a belibig war, habe ich geschlossen, dass jeder Gegenstand die Gegenstände fusioniert. Wie der obigen Tabelle zu entnehmen ist, war meine Annahme falsch. Es gilt:

$$\forall \chi \exists \upsilon\, (\alpha[\chi] \leftrightarrow \beta[\upsilon]) \leftarrow\!\!\not\rightarrow \forall \chi\, (\alpha[\chi] \leftrightarrow \exists \upsilon\, \beta[\upsilon])$$

Machen wir uns das an einem Beispiel klar. Wir zeigen, dass

$$\forall y \exists z\, (Rzy \leftrightarrow Rya) \not\models \forall y\, (\exists z\, Rzy \leftrightarrow Rya)$$

und betrachten dabei dieses Modell:

$$D = \{\text{Arne}, \text{Bea}\}, [\![a]\!] = \text{Arne}, [\![b]\!] = \text{Bea}, [\![R]\!] = \{\langle \text{Arne}, \text{Arne}\rangle, \langle \text{Bea}, \text{Bea}\rangle\}$$

Interpretieren wir “Rxy” als “x mag y”. Wir reden ausschließlich über Arne und Bea. Sie mögen sich beide selbst – und sonst niemanden. Unsere Prämisse

(1) $\forall y \exists z\, (Rzy \leftrightarrow Rya)$

liest sich wie folgt: Für jeden y gibt es jemanden z, der genau dann, wenn dieser Jemand z ihn mag, Arne mag. Warum ist diese Behauptung in unserem Modell nun wahr? Zunächst schrauben wir den Allquantor ab: Unser Redebereich erstreckt sich lediglich über Arne und Bea, also ist (1) wahr gdw

(1.1) $\exists z\, (Rza \leftrightarrow Raa)$ und
(1.2) $\exists z\, (Rzb \leftrightarrow Rba)$

Die beiden Formeln sind aufteilbar in

(1.1.1) $\exists z\, (Rza \rightarrow Raa)$
(1.1.2) $\exists z\, (Raa \rightarrow Rza)$
(1.2.1) $\exists z\, (Rzb \rightarrow Rba)$
(1.2.2) $\exists z\, (Rba \rightarrow Rzb)$

(1) ist also genau dann, wahr, wenn die oben stehenden Formeln wahr sind. (1.1.1) ist nun wahr, denn egal was wir für z einsetzen – das Sukzedens ist wahr. (1.1.2) ist wahr, weil wir für z a einsetzen können. (1.2.1) ist wahr, weil wir für

z b einsetzen können und (1.2.2) ist für jede Belegung wahr, denn das Antezedens ist falsch. Insgesamt erfüllt unser Modell also unsere Prämisse (1). Wie sieht es nun mit der Konklusion

(2) $\forall y\, (\exists z\, Rzy \leftrightarrow Rya)$

aus? Gehen wir auf dieselbe Weise wie bei (1) vor: (2) ist wahr gdw

(2.1) $\exists z\, Rza \leftrightarrow Raa$ und
(2.2) $\exists z\, Rzb \leftrightarrow Rba$

Auch diese Formeln sind erneut in Subformeln unterteilbar:

(2.1.1) $\exists z\, Rza \rightarrow Raa$
(2.1.2) $Raa \rightarrow \exists z\, Rza$
(2.2.1) $\exists z\, Rzb \rightarrow Rba$
(2.2.2) $Rba \rightarrow \exists z\, Rzb$

(2.1.1) ist wieder aufgrund des wahren Sukzedens wahr. (2.1.2) ist auch wahr, da das Sukzedens eine existentielle Generalisierung des Antezedens ist. Auch (2.2.2) ist wahr, denn Bettina mag Arne nicht. (2.2.1) auf der anderen Seite ist aber falsch: Es gibt jemanden, der Bettina mag – nämlich Bettina selbst –, aber Bettina mag Arne nicht. Da (2.2.1) falsch ist, ist auch (2.2) falsch und folglich (2). Wir haben also ein Modell konstruiert, in dem die Prämisse wahr ist, die Konklusion aber falsch. Damit haben wir gezeigt, dass gilt:

$\forall y \exists z\, (Rzy \leftrightarrow Rya) \not\models \forall y\, (\exists z\, Rzy \leftrightarrow Rya)$.

Warum (1) (2) nicht impliziert, wird klar, wenn wir (1.2.1) und (2.2.1) vergleichen:

(1.2.1) $\exists z\, (Rzb \rightarrow Rba)$
(2.2.1) $\exists z\, Rzb \rightarrow Rba$

Es gilt nämlich:

$\exists z\, Rzb \rightarrow Rba \models \exists z\, (Rzb \rightarrow Rba)$
$\exists z\, (Rzb \rightarrow Rba) \not\models \exists z\, Rzb \rightarrow Rba$

Anders gesagt: Der Existenzquantor lässt sich *salva veritate* aus dem Antezedens heraus-, aber nicht hereinziehen. Warum ist das so? Übersetzen wir beide Formeln:

(ad 1.2.1) Es gibt jemanden, sodass, *wenn* er/sie Bea mag, Bea Arne mag.
(ad 2.2.1) Wenn jemand Bea mag, mag Bea Arne.

(1.2.1) ist eine deutlich schwächere Aussage als (2.2), denn sie wird wahr, sobald auch *nur eine Person* Bea nicht mag:

$\exists z \sim Rzb \models \exists z\, (Rzb \rightarrow Rba)$

Das gilt aber nicht für (2.2):

$$\exists z \sim Rzb \nvDash \exists z\ Rzb \to Rba$$

Um (2.2) wahr zu machen, müssen wir eine viel stärkere Behauptung investieren, nämlich die, dass *niemand* Bea mag:

$$\sim\exists z\ Rzb \vDash \exists z\ Rzb \to Rba$$

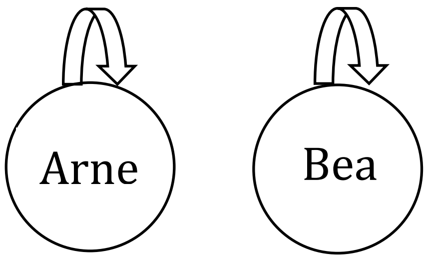
Da der Redebereich nicht-leer ist, gibt es jemanden, der Bea nicht mag, wenn niemand Bea mag:

$\sim\exists z\ Rzb \vDash \exists z \sim Rzb$

Nun könnte man einwenden, dass unser Modell kein Beleg dafür ist,
dass

$$\forall y \exists z\ (Gz \land z{\circ}y \leftrightarrow y{\circ}a) \nvDash \forall y\ (\exists z\ (Gz \land z{\circ}y) \leftrightarrow y{\circ}a)$$

denn auch wenn „Gz“ wegfällt, da tautologisch, handelt es sich bei ○ nicht um ein beliebiges Prädikat, sondern um ein besonderes – die Überlappenrelation! Diese Bedenken verlieren jedoch schnell an Fahrt, wenn man bedenkt, dass die Überlappenrelation zunächst nur darin besonders ist, dass sie symmetrisch und reflexiv ist. R in unserem Modell erfüllt nämlich genau diese Ansprüche: Jeder mag sich selbst und falls Jemand_1 Jemand_2 mag, mag Jemand_2 auch Jemand_1. Aus diesem Grund können wir aus unserem PL-Modell sehr leicht ein mereologisches Modell basteln. Deuten wir R nun als mereologische Überlappenrelation, sieht unser Gegenmodell wie folgt aus:



Wie leicht zu erkennen ist, handelt es sich um ein atomistisches, ja sogar um ein mereologisch-nihilistisches Modell von CEM.

Gerade haben wir erläutert, dass gilt:

$$\forall y \exists z\ (Gz \land z{\circ}y \leftrightarrow y{\circ}a) \nvDash \forall y\ (\exists z\ (Gz \land z{\circ}y) \leftrightarrow y{\circ}a)$$

Auf meinen Folien habe ich bewiesen, dass aus Priests Mereologie folgt, dass

$$\forall y \exists z\ (Gz \land z{\circ}y \leftrightarrow y{\circ}a)$$

Daraus folgt also nicht, dass

$$\forall y\ (\exists z\ (Gz \land z{\circ}y) \leftrightarrow y{\circ}a)$$

Letzteres ist aber genau die Definition von Typ-1-Fusionen, die in der Literatur (Ridder, 2002, S. 93; Simons, 1987/2003, S. 48; Varzi, 2014, S. 367) benutzt wird. Folglich habe ich nicht bewiesen, dass jedes Objekt die Gegenstände fusioniert! Vielmehr ist unser Gegenmodell der Beweis dafür, dass

$$\nvDash \forall y\,(\exists z\,(Gz \land z \circ y) \leftrightarrow y \circ a)$$

denn wäre die in Frage stehende Formel allgemeingültig, müsste sie, da wir von einer monotonen Logik ausgehen, auch von

$$\forall y \exists z\,(Gz \land z \circ y \leftrightarrow y \circ a)$$

impliziert werden – das wird sie aber nicht! Folglich ist es nicht so, dass jeder Gegenstand die Gegenstände fusioniert. Analog zum Quantorendreher gibt es also auch noch weitere quantorenbezogene Fehlschlüsse: Den *Quantorenzieher* und den *Quantorenschieber*.

Literatur

Ridder, L. (2002). *Mereologie: Ein Beitrag zur Ontologie und Erkenntnistheorie*. V. Klostermann.

Simons, P. M. (2003). *Parts: A Study in Ontology*. Oxford University Press. (Original work published 1987)

Varzi, A. C. (2014). Formal Theories of Parthood. In C. Calosi & P. Graziani (Hrsg.), *Mereology and the Sciences*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05356-1