A Note on Truth, Satisfaction and the Empty Domain

Eine Erläuterung von Timothy Williamsons‘ Kritik an Wahrheit durch Erfüllbarkeit

Ein paar Definitionen

Belegungen

Seien x_0, x_1, … die Variablen einer formalen Sprache L. Sei M=<D, ⟦…⟧> ein beliebiges Modell von L.

Eine M-Belegung g ist eine Abbildung von der Menge der L-Variablen auf den Redebereich von M: $g: \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to D$

M-Belegungen weisen allen Variablen von L ein Element aus dem Redebereich von M zu.

Beispiel: Sei D={Arne, Bea}. Dann gilt für alle Variablen x: $g(x)$ = Arne oder $g(x)$ = Bea.

Belegungsvarianten

Ist g eine M-Belegung, d∈D ein Element des Redebereichs von M und χ eine Variable von L, so ist die Belegungs-variante $g\frac{d}{\chi}$ diejenige Belegung, die χ auf d abbildet und für alle von χ verschiedenen Variablen mit g übereinstimmt:

$g\frac{d}{\chi}$:= g(u), falls u≠χ

$g\frac{d}{\chi}$:= d, falls u=χ

Die Modellbeziehung

Sei d(t)=g(t), falls t eine Variable und d(t)=⟦t⟧, falls t eine Konstante ist.

Atomare Formeln	M, g	$\vDash$	$t_1=t_2$	gdw	$d(t_1)=d(t_2)$
	M, g	$\vDash$	$\Phi t_1 \ldots t_n$	gdw	$\langle d(t_1),\ldots, d(t_n)\rangle \in [\![\Phi]\!]$
Junktor-formeln	M, g	$\vDash$	$\sim\alpha$	gdw	M, g $\nvDash$ α
	M, g	$\vDash$	$(\alpha \wedge \beta)$	gdw	M, g $\vDash$ α und M, g $\vDash$ β
	M, g	$\vDash$	$(\alpha \vee \beta)$	gdw	M, g $\vDash$ α oder M, g $\vDash$ β
	M, g	$\vDash$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	gdw	wenn M, g $\vDash$ α, dann M, g $\vDash$ β
	M, g	$\vDash$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	gdw	M, g $\vDash$ α gdw M, g $\vDash$ β
Quantor-formeln	M, g	$\vDash$	$\forall\chi\alpha$	gdw	Für alle d∈D gilt: M, $g\frac{d}{\chi}$ $\vDash$ α
	M, g	$\vDash$	$\exists\chi\alpha$	gdw	Es gibt ein d∈D, sodass M, $g\frac{d}{\chi}$ $\vDash$ α

Die Modellbeziehung – Sprechweisen

Wir lesen „$M, g \vDash \alpha$“ als „M <u>erfüllt</u> α unter der Belegung g“.

Wir definieren:

$M \vDash \alpha$ gdw $M, g \vDash \alpha$ für jede M-Belegung g.

Wir lesen „$M \vDash \alpha$“ als „α <u>ist wahr</u> in M“.

α ist also wahr in M genau dann, wenn M α unter jeder Belegung erfüllt.

Probleme mit Belegungen in leeren Redebereichen

Belegungen auf leere Redebereiche?

Sei $M_{\emptyset} = <\emptyset, [\![...]\!]>$ das Modell mit leerem Redebereich („leeres Modell“).

Da eine M-Belegung g eine Abbildung von der Menge der Variablen auf den Redebereich von M ist und der Redebereich von $M_{\emptyset}$ leer ist, wäre g eine Abbildung von den Variablen von L auf die leere Menge:

$g: \{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \emptyset$

Nun gibt es aber keine Funktion einer nicht-leeren Menge auf die leere Menge, denn sie kann unmöglich linkstotal ($\forall x \exists y\, Rxy$) sein. Also hat $M_{\emptyset}$ keine Belegungen. Im Übrigen: $[\![\tau]\!]$ existiert nicht und $[\![\Phi]\!]=\emptyset$ in $M_{\emptyset}$.

Wie sieht ein leeres Modell aus?

$$M = \langle \emptyset, [\![\ldots]\!] \rangle$$

Wichtig: Damit leere Modelle existieren, muss Williamson annehmen, dass ⟦…⟧ eine partielle Funktion sein darf. Genau das schließt er aber für die Belegungsfunktionen aus (sonst funktioniert sein Argument nicht)!

Existiert nicht, da $g: \{\tau_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \emptyset$ keine Funktion ist!

$$M = \langle \emptyset, \{ \langle F, \emptyset \rangle, \langle R, \emptyset \rangle, \ldots \}$$

∅, da ⟦…⟧ Teilmengen von D zuweist und $D=\emptyset$

D	Redebereich
2a	Denotation
2b	Extension

$\left.\begin{array}{l}\text{2a Denotation}\\ \text{2b Extension}\end{array}\right\} [\![\ldots]\!]$

Trivialerweise wahre Formeln im leeren Modell

Das leere Modell $M_\emptyset = \langle \emptyset, [\![\dots]\!] \rangle$ hat keine Belegungen. Aber wir haben Wahrheit in einem Modell so definiert:

$M \vDash \alpha$ gdw $M, g \vDash \alpha$ für jede M-Belegung g.

Nun gilt folgender Schluss: $\sim\exists x\ Gx \vDash \forall x\ (Gx \rightarrow \alpha)$. Stehe „Gx" für „x ist eine M-Belegung". Dann gilt: $\forall x\ (Gx \rightarrow M_\emptyset, x \vDash \alpha)$. Das bedeutet: $M_\emptyset, g \vDash \alpha$ für jede $M_\emptyset$-Belegung g. Also gilt, per Definition, auch $M_\emptyset \vDash \alpha$. Das bedeutet: Im leeren Modell $M_\emptyset$ ist jede wohlgeformte Formel wahr!

Korrektheit und Vollständigkeit

Unterscheiden sich L und $L_\emptyset$ lediglich darin, dass $L_\emptyset$ im Gegensatz zu L leere Modelle zulässt. Für $L_\emptyset$ können wir nun definieren:

$\text{Wahr}_{\text{nicht-leer}} = \{\alpha \mid M \vDash \alpha \text{ für alle } M \neq M_\emptyset\}$

$\text{Wahr}_{\text{leer}} = \{\alpha \mid M_\emptyset \vDash \alpha \text{ für alle } M_\emptyset\} = \{\alpha \mid \alpha \text{ ist eine wff}\}$

$\text{Wahr}_{\text{nicht-leer}}$ ist die Menge der wffs, die in allen nicht-leeren Modellen wahr sind, $\text{Wahr}_{\text{leer}}$ die Menge der wffs, die in allen leeren Modellen wahr sind.

Korrektheit und Vollständigkeit

Diejenigen Formeln, die in allen Modellen von $L_\emptyset$ wahr sind, sind diejenigen, die sowohl in allen nicht-leeren als auch in allen leeren Modellen von $L_\emptyset$ wahr sind. Da (mit üblichen Belegungen) jede Formel im leeren Modell wahr ist, sind die Tautologien von $L_\emptyset$ die Formeln, die in allen nicht-leeren Modellen wahr sind. Das sind aber gerade die Tautologien von L!

$$\mathrm{Taut}(L_\emptyset) = \mathrm{Wahr}_{\text{nicht-leer}} \cap \mathrm{Wahr}_{\text{leer}} = \mathrm{Wahr}_{\text{nicht-leer}} = \mathrm{Taut}(L)$$

Also gilt: $\vDash_{L\emptyset} \alpha \leftrightarrow \vDash_{L} \alpha$, falls g nicht limitiert

Korrektheit und Vollständigkeit

Wir haben gezeigt, dass gilt: $\vDash_{L\emptyset}\ \alpha \leftrightarrow\ \vDash_{L}\ \alpha$. Es gilt also:

“[A] logic sound and complete for nonempty models is already a sound and complete inclusive logic without any modification of its proof theory." (S. 4)

$$(\vdash_{L} \alpha \Rightarrow\ \vDash_{L} \alpha) \Rightarrow (\vdash_{L} \alpha \Rightarrow\ \vDash_{L\emptyset} \alpha)$$
$$(\vDash_{L} \alpha \Rightarrow\ \vdash_{L} \alpha) \Rightarrow (\vDash_{L\emptyset} \alpha \Rightarrow\ \vdash_{L} \alpha)$$

Absurde Konsequenzen

Da alle Formeln im leeren Modell wahr sind, sind auch widersprüchliche Formeln wie „Fa ∧ ~Fa“ und Formeln wie „∃x x=x“, die in inklusiven Logiken charakteristischerweise falsch sein sollten, wahr.

Da jede Formel wahr ist, ist auch ihre Negation wahr. Definiert man Falschheit so, dass ɑ falsch ist gdw ~ɑ wahr ist, ist also auch jede Formel falsch.

Definiert man Falschheit so, dass ɑ falsch ist gdw ɑ nicht wahr ist, ist keine Formel falsch.

Definiert man Wahrheit in M als Erfüllbarkeit in M für mindestens eine M-Belegung, ist keine Formel wahr.

Limitierte Belegungen als Lösungsansatz

Induktive Definition von freien Variablen innerhalb einer Formel

$var(\chi)$	$:=$	$\{\chi\}$	
$var(\tau)$	$:=$	$\emptyset$	für Konstanten τ
$frei(t_1=t_2)$	$:=$	$var(t_1) \cup var(t_2)$	Für Terme t_1, t_2
$frei(\Phi t_1 \ldots t_n)$	$:=$	$var(t_1) \cup \ldots \cup var(t_n)$	Für Terme $t_1, \ldots, t_n$
$frei(\sim\alpha)$	$:=$	$frei(\alpha)$	
$frei(\alpha * \beta)$	$:=$	$frei(\alpha) \cup frei(\beta)$	für $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
$frei(\exists\chi\alpha)$	$:=$	$frei(\alpha) \setminus \{\chi\}$	
$frei(\forall\chi\beta)$	$:=$	$frei(\alpha) \setminus \{\chi\}$	

Ein Lösungsansatz – limitierte Belegungen (Schneider 1958)

Sei M=<D, ⟦…⟧> ein L-Modell. Eine M,α-Belegung g_α ist eine Abbildung von der Menge der Variablen, die in α frei vorkommen, auf den Redebereich von M: g_α: frei(α) $\rightarrow$ D

g_α nennen wir auch eine (auf α) limitierte Belegung.

Wir definieren Wahrheit in M nun nicht abhängig von M-Belegungen g, sondern abhängig von M,α-Belegungen g_α.

Limitierte vs. Normale Belegungen

Limitierte Belegungen und normale Belegungen fallen in nicht-leeren Modellen zusammen. Der Grund dafür ist, dass die einzigen für eine Formel α relevanten Zuweisungen diejenigen g(χ) sind, für die gilt, dass χ frei in α vorkommt. Genau diese Zuweisungen tätigen aber limitierte Belegungen.

Im leeren Modell fallen limitierte Belegungen und normale Belegungen jedoch nicht zusammen (siehe nächsten Folien).

Die Modellbeziehung mit limitierten Belegungen

atomare Formeln	$M, g_{t1=t2}$	$\vDash$	$t_1=t_2$	gdw	$d(t_1)=d(t_2)$
	$M, g_{\Phi t1\ldots tn}$	$\vDash$	$\Phi t_1\ldots t_n$	gdw	$\langle d(t_1),\ldots, d(t_n)\rangle \in [\![\Phi]\!]$
Junktor-formeln	$M, g_{\sim\alpha}$	$\vDash$	$\sim\alpha$	gdw	$M, g_\alpha \nvDash \alpha$
	$M, g_{\alpha \wedge \beta}$	$\vDash$	$(\alpha \wedge \beta)$	gdw	$M, g_\alpha \vDash \alpha$ und $M, g_\beta \vDash \beta$
	$M, g_{\alpha \vee \beta}$	$\vDash$	$(\alpha \vee \beta)$	gdw	$M, g_\alpha \vDash \alpha$ oder $M, g_\beta \vDash \beta$
	$M, g_{\alpha \to \beta}$	$\vDash$	$(\alpha \to \beta)$	gdw	wenn $M, g_\alpha \vDash \alpha$, dann $M, g_\beta \vDash \beta$
	$M, g_{\alpha \leftrightarrow \beta}$	$\vDash$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	gdw	$M, g_\alpha \vDash \alpha$ gdw $M, g_\beta \vDash \beta$
Quantor-formeln	$M, g_{\forall\chi\alpha}$	$\vDash$	$\forall\chi\alpha$	gdw	Für alle $d\in D$ gilt: $M, g_\alpha\frac{d}{\chi} \vDash \alpha$
	$M, g_{\exists\chi\alpha}$	$\vDash$	$\exists\chi\alpha$	gdw	Es gibt ein $d\in D$, sodass $M, g_\alpha\frac{d}{\chi} \vDash \alpha$

$M \vDash \alpha$ gdw $M, g_\alpha \vDash \alpha$ für jede M,α-Belegung g_α.

Limitierte Belegungen– ein Beispiel

Sei $M=\langle D, [\![\ldots]\!]\rangle$ mit $D=\{\text{Arne}, \text{Bea}\}$ und $\alpha=\forall x\, Fx \to Gy$.

Eine M-Belegung g ist eine Abbildung $g:\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to D$.

Eine $M_{,\forall x\, Fx \to Gy}$-Belegung ist eine Abbildung $g_{\forall x\, Fx \to Gy}: \{y\} \to D$.

$G(g_{\forall x\, Fx \to Gy}) = \{\langle y, \text{Arne}\rangle\}$ oder $g_{\forall x\, Fx \to Gy} = \{\langle y, \text{Bea}\rangle\}$

$G(g)=\{\langle x, \text{Arne}\rangle, \langle y, \text{Arne}\rangle, \langle z, \text{Bea}\rangle, \langle x', \text{Bea}\rangle, \ldots\}$ (bspw.)

Die Vorteile von Limitierten Belegungen im Überblick

- Geschlossene Formeln sind im leeren Modell nicht mehr trivialerweise wahr
- Auch die Negation funktioniert bei geschlossenen Formeln in leeren Modellen wie gewünscht
- Alle allquantifizierten Sätze sind wahr im leeren Modell (außer, wenn ∀ leerdreht und α falsch ist)
- Alle existenzquantifizierten Sätze sind falsch im leeren Modell (außer, wenn ∃ leerdreht und α wahr ist)

Geschlossene Formeln im leeren Modell mit limitierten Belegungen

Sei α eine geschlossene Formel, also frei(α)={}, und die M,α-Belegung entsprechend die Abbildung von der leeren Menge auf D: g_α: {} → D. Ihr Graph ist die leere Menge.

Ist $M_\emptyset$ das leeresModell, ist die $M_\emptyset$,α-Belegung die Abbildung von der leeren Menge auf die leere Menge: g_α:{} → {}. Diese Abbildung existiert; ihr Graph ist auch die leere Menge. Also gibt es für geschlossene Formeln in $M_\emptyset$ nicht mehr keine, sondern – wie in nicht-leeren Modellen – genau eine Belegung, sodass gilt: $M_\emptyset \vDash \alpha$ gdw $M_\emptyset, \{\} \vDash \alpha$. Da es nun eine Belegung für jede Formel in $M_\emptyset$ gibt, sind nicht mehr alle Formeln im leeren Modell trivialerweise wahr. Im leeren Modell können Formeln nun also falsch sein!

Negationen von geschlossenen Formeln im leeren Modell mit limitierten Belegungen

Sei β (und damit auch ~β) eine geschlossene Formel. Nun haben wir definiert: $M \vDash \sim\beta$ gdw $M, g_{\sim\beta} \vDash \sim\beta$ für jede $M,g_{\sim\beta}$-Belegung. Da frei(β)=frei(~β)={}, sind auch die Graphen aller $g_{\sim\beta}$ und aller g_β die leere Menge. Also gilt: $M \vDash \sim\beta$ gdw $M, \{\} \vDash \sim\beta$.

Da wir definiert haben, dass $M,g_{\sim\beta} \vDash \sim\beta$ gdw $M, g_\beta \nvDash \beta$, können wir für geschlossenes β folgern, dass $M, \{\} \vDash \sim\beta$ gdw $M, \{\} \nvDash \beta$. Da die leere Belegung keine Variablen zuweist, gilt auch $M \vDash \sim\beta$ gdw $M \nvDash \beta$.

Wir haben M beliebig gewählt, also gilt auch $M_\emptyset \vDash \sim\beta$ gdw $M_\emptyset \nvDash \beta$ für geschlossenes β. Da wir bereits gezeigt haben, dass geschlossene Formeln nicht trivialerweise wahr sind, funktioniert die Negation bei geschlossenen Formeln auch im leeren Modell wie gewünscht: Sie vertauscht die Wahrheitswerte einer Formel!

All-Sätze im leeren Modell mit limitierten Belegungen

Nehmen wir an, χ kommt frei in α vor. Es gilt:

$$M, g_{\forall\chi\alpha} \vDash \forall\chi\alpha \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } d\in D \text{ gilt: } M, g_{\alpha}\frac{d}{\chi} \vDash \alpha$$

Da frei(α)≠{} und D={}, gibt es keine g_α–Belegung, weil es keine Abbildung von einer nicht-leeren in die leere Menge gibt. Also gibt es auch keine g_α–Belegungsvariante. Deshalb macht jede g_α–Belegungsvariante α trivialerweise wahr. Also ist auch, per Definition, ∀χα wahr. Es gilt folglich:

$M_\emptyset \vDash \forall\chi\alpha$, falls χ frei in α (falls ∀ nicht leerdreht)

Existenz-Sätze im leeren Modell mit limitierten Belegungen

Nehmen wir an, χ kommt frei in α vor. Es gilt:

$M, g_{\exists\chi\alpha} \vDash \exists\chi\alpha$ gdw für mind. ein $d \in D$ gilt: $M, g_{\alpha}{\frac{d}{\chi}} \vDash \alpha$

Da $\text{frei}(\alpha) \neq \{\}$ und $D = \{\}$, gibt es keine g_{α}–Belegung, weil es keine Abbildung von einer nicht-leeren in die leere Menge gibt. Also gibt es auch keine g_{α}–Belegungsvariante, die α wahr macht. Also ist $\exists\chi\alpha$ falsch. Es gilt folglich:

$M_{\emptyset} \nvDash \exists\chi\alpha$, falls χ frei in α (falls $\exists$ nicht leerdreht)

Leerdrehende Quantoren mit limitierten Belegungen I

Nehmen wir an, α ist eine geschlossene Formel. Dann sind die M,g_α-Belegungen leer. Da α geschlossen ist, sind auch $\forall\chi\alpha$ und $\exists\chi\alpha$ geschlossen; also sind auch die Graphen der M,$g_{\forall\chi\alpha}$- und M,$g_{\exists\chi\alpha}$-Belegungen und deren Varianten leer.

Nach Definition M, $g_{\exists\chi\alpha} \vDash \exists\chi\alpha$ gdw für mind. ein $d \in D$ gilt: M, $g_{\alpha}{}_{\frac{d}{\chi}} \vDash \alpha$ gilt nun:

M, $\{\} \vDash \exists\chi\alpha$ gdw für mind. ein $d \in D$ gilt: M, $\{\} \vDash \alpha$. Das bedeutet:

M, $\{\} \vDash \exists\chi\alpha$ gdw M, $\{\} \vDash \alpha$. Das bedeutet nichts anderes als

M $\vDash \exists\chi\alpha$ gdw M $\vDash \alpha$, falls α geschlossen (falls $\exists$ leerdreht). *Mutatis mutandis* für $\forall$:

M $\vDash \forall\chi\alpha$ gdw M $\vDash \alpha$, falls α geschlossen (falls $\forall$ leerdreht).

Leerdrehende Quantoren mit limitierten Belegungen II

Wir haben gerade gezeigt, dass, wenn α geschlossen ist, gilt:

$$M \vDash \forall \chi\alpha \Leftrightarrow M \vDash \exists \chi\alpha \Leftrightarrow M \vDash \alpha$$

Wenn α eine geschlossene Formel ist, drehen ∀ und ∃ in $\forall\chi\alpha$ bzw. $\exists\chi\alpha$ leer. Da wir auch gezeigt haben, dass geschlossene Formeln im leeren Modell mit limitierten Belegungen falsch sein können und eine Formel mit leerdrehendem Quantor unter denselben Bedingungen wahr ist wie dieselbe Formel ohne diesen Quantor, können auch allquantifizierte Formeln im leeren Modell falsch sein:

Genau dann, wenn ∀ leerdreht und $M_\emptyset \nvDash \alpha$: $M_\emptyset \nvDash \forall\chi\alpha$

Mutatis mutandis gilt für existenzquantifizierte Formeln:

Genau dann, wenn ∃ leerdreht und $M_\emptyset \vDash \alpha$: $M \vDash \exists\chi\alpha$.

Das Problem, Wahrheit indirekt rekursiv zu definieren

Die Nachteile von limitierten Belegungen

Ist α eine *offene* Formel und $M_\emptyset$ das leere Modell, gibt es immer noch keine $M_\emptyset,\alpha$-Belegungen, da keine Abbildung von einer nicht-leeren Menge auf die leere Menge existiert. Also ist immer noch jede offene Formel (und ihre Negation) in $M_\emptyset$ wahr: $M_\emptyset \vDash \alpha$, falls α offen.

Deshalb ist nicht jede Instanz des modus ponens gültig:„$Fx \rightarrow Fx$" ist trivialerweise wahr in $M_\emptyset$, da offen. Dasselbe gilt für die Formel „$(Fx \rightarrow Fx) \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow Fx)$". Nun müsste per modus ponens gelten, dass auch „$\exists x(Fx \rightarrow Fx)$" wahr ist. Diese Formel ist aber falsch in $M_\emptyset$, denn sie ist geschlossen, von der Form $\exists \chi\alpha[\chi]$ und $\exists$ dreht nicht leer.

Wo liegt das Problem?

Das Problem könnte darin liegen, dass Wahrheit in einem Modell indirekt durch Erfüllbarkeit in einem Modell definiert wird. Diese Definition ist auch schon in nicht-leeren Modellen merkwürdig, denn

(1) es kann sein, dass eine Alternation wahr ist, obwohl keines ihrer Alternate wahr ist.

(2) die Definition von Wahrheit ist nicht völlig kompositional$_F$.

(3) es kann sein, dass eine existentielle Generalisierung wahr ist, obwohl keine ihrer Instanzen wahr ist.

Wahre Alternation mit falschen Alternaten

Nehmen wir an, einige, aber nicht alle $d \in D$ sind Element von $[\![F]\!]$. Sei $d_F \in D$ und $d_F \in [\![F]\!]$. Sei $d_{\sim F} \in D$, aber $d_{\sim F} \notin [\![F]\!]$. Dann gilt:

$M \vDash Fx \vee {\sim}Fx$, weil $M, g \vDash Fx \vee {\sim}Fx$ für jede Belegung g.

$M \nvDash Fx$, weil es eine Belegung gibt, sodass $M, g \nvDash Fx$ – nämlich $g(x)= d_{\sim F}$.

$M \nvDash {\sim}Fx$, weil es eine Belegung gibt, sodass $M, g \nvDash {\sim}Fx$ – nämlich $g(x)= d_F$.

Es ist also möglich, dass eine Alternation in einem Modell wahr ist, ohne dass auch nur eins ihrer Alternate wahr ist!

Wahre existentielle Generalisierungen und keine wahren Instanzen

Nehmen wir an, der Redebereich von M hat mindestens zwei Elemente, d_1 und d_2. Nun gilt:

$M \vDash \exists y\ x=y$, denn $M, g \vDash \exists y\ x=y$ für jede Belegung g.

$M \vDash x=y$, weil es eine Belegung gibt, sodass $M, g \nvDash x=y$, nämlich $g(x)=d_1$ und $g(y)=d_2$.

Das liegt daran, dass eine offene Formel so interpretiert wird wie ihr ∀-Abschluss, wenn sie alleine steht. Ist χ in α frei, gilt also: $M \vDash \alpha \Leftrightarrow M \vDash \forall\chi\ \alpha$.

NICHT-KOMPOSITIONALITÄT

Sei α eine Formel, in der χ frei vorkommt. Nehmen wir an, Wahrheit in einem Modell ergäbe sich nach dem Kompositionalitätsprinzip$_F$. Dann müsste gelten: $M \vDash (\alpha \vee \beta)$ gdw $M \vDash \alpha$ oder $M \vDash \beta$.

Da $M \vDash \alpha \Leftrightarrow M \vDash \forall\chi\alpha$ müsste also gelten, dass $M \vDash (\alpha \vee \beta)$ gdw $M \vDash \forall\chi\alpha$ oder $M \vDash \forall\chi\beta$. Sei $(\alpha \vee \beta)=(Fx \vee Gx)$. Dann müsste gelten: $M \vDash Fx \vee Gx$ gdw $M \vDash \forall xFx$ oder $M \vDash \forall xGx$.

Genau das gilt aber nicht! Hier ein Gegenmodell: $D=\{d_1, d_2\}$, $[\![F]\!] = \{d_1\}$, $[\![G]\!] = \{d_2\}$. Nun gilt für jede Belegung: $Fx \vee Gx$. Für keine Belegung gilt aber: $\forall xFx$ oder $\forall xGx$. Also ist Wahrheit in einem Modell nicht kompositional$_F$!

Nicht-Kompositionalität

A semantics that fully interprets closed formulas by recursion on less than fully interpreted open formulas is not straightforwardly compositional; it does not generate the full interpretations of complex expressions from the full interpretations of their constituents. (S. 6)

Warum ist Kompositionalität$_F$ so wichtig?

Wahrheit statt Erfüllbarkeit?

Gibt man Belegungen auf und definiert man Wahrheit (von geschlossenen Formeln) in einem Modell direkt rekursiv, behebt man sowohl die drei Erfüllbarkeitsprobleme als auch das Problem mit Wahrheit im leeren Modell.

Problematisch wird es dann nur, wenn es in der Domain Objekte ohne Namen gibt (was gut möglich ist, bspw., wenn $D=\mathbb{R}$). Um das Problem zu lösen, muss man z. B. annehmen, dass kein Objekt ohne Namen ist. Das aber ist nicht besonders intuitiv, denn es gibt viele Objekte in der Welt, die keinen Namen tragen.

Was ist mit Kanger-Mates-Semantik?

Probleme mit direkt rekursiven Wahrheitsdefinitionen

The problem can be overcome by quantification over possible extensions of the language, if one is willing to assume that every member of the domain of a model has a name in some possible extension of the language. But that assumption becomes highly contentious if combined with the (not uncontentious) view that every possible language could be used by some possible speaker. (S. 6)

Wahrheit statt Erfüllbarkeit – Termerweiterungen

Die Problematik, dass Objekte im Redebreich keine Namen haben, kann man jedoch beheben. Wir erweitern unsere Sprache L zu eine Sprache L‘, für die gilt: Für jede Variable χ und jedes Objekt $d \in D$ ist $<\chi,d>$ ein singulärer Term, sodass $[\![<\chi,d>]\!] = d$.

Entstehe $\alpha[\chi|d]$ dadurch, dass man alle freien Vorkommnisse von χ in α durch $<\chi,d>$ ersetzt. Dann ist $\forall\chi\alpha$ genau dann wahr, wenn für jedes $d \in D$ gilt: $\alpha[\chi|d]$. Diese Semantik erlaubt, über überabzählbare Redebereiche zu quantifizieren.

Auch diese Semantik ist aber nicht völlig kompositional$_F$, da $\alpha[\chi|d]$ kein direkter Bestandteil von $\forall\chi\alpha$ ist!

Probleme mit Termerweiterungen

There is no pretence that a possible speaker could use this extension of the language as a language, or <v, d> as a name of d. Rather, the device may be one step towards a semantics in which Russellian propositions mediate between sentences and their truth-values. (S. 7)

Inner und Outer Domain Semantik

Ein PFL-Modell ist ein Tripel $<D_O, D_I, [\![\ldots]\!]>$, für den gilt:

1. $D_I \subseteq D_O$ sind Mengen, sodass $|D_O| > 0$
2. $[\![\ldots]\!]$ ist eine Funktion, die insgesamt zwei Aufgaben erfüllt:
   1. Sie ordnet jeder Individuenkonstante ein Element aus D_O zu
   2. Sie ordnet jedem n-stelligen Prädikatsymbol eine Menge von n-Tupeln über D_O zu

Sei ein leeres Modell $M_{\emptyset} = <D_O, \emptyset, [\![\ldots]\!]>$. (Hier gibt es mehr als ein leeres Modell!)

Inner und Outer Domain Semantik

Eine M-Belegung g ist eine Abbildung von der Menge der L-Variablen auf die Outer Domain von M: $g: \{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow D_O$

Sei α eine wff, in der χ frei vorkommt. Dann gilt:

$M, g \vDash \forall\chi\alpha$ gdw für alle $d_i \in D_I$ gilt: $M, g\frac{d_i}{\chi} \vDash \alpha$

$M \vDash \alpha$ gdw $M, g \vDash \alpha$ für jede M-Belegung g.

Da $D_O \neq \emptyset$ für jedes Modell (auch für $M_\emptyset$) gilt und g auf D_O abbildet, gibt es auch für $M_\emptyset$ Belegungen. Die Quantoren laufen aber über D_I, also gilt: $M_\emptyset \vDash \forall\chi\alpha$ und $M_\emptyset \nvDash \exists\chi\alpha$, falls α offen.

Probleme mit Inner und Outer Domain Semantik

Die Inner-Outer-Domain-Lösung muss sich immer noch dem Problem der Nicht-Kompositionalität stellen.

Moreover, some elements outside the inner domain are extrinsic to the model as usually understood. For purposes of model theory, we may wish to make the definition of truth in M intrinsic to M; the direct recursion on truth above meets that condition.

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!